EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

29e JAARGANG 1953/54

V

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van L i w e n a g e l (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van W i m e c o s (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:

Officiële mededelingen van WIMECOS 213
Adres van WIMECOS aan de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen 213
S. J. GEURSEN, Nog eens: De meetkunde in de eerste klas 218
Dr P. G. J. VREDENDUIN, Het differentiëren van de exponentiële functies 222
Didactische Revue 225
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden 234
Boekbespreking 244
Korrels CX—CXIII 249
C. J. VOOYS, Didactiek in de 15e eeuw 259

OFFICIELE MEDEDELINGEN VAN WIMECOS.

De Secretaris-Penningmeester van Wimecos verzoekt de leden de contributie voor het verenigingsjaar 1954/55 vóór of op 1 October 1954 over te maken op de girorekening no. 143 917 van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Deze contributie is op de laatste Algemene Vergadering opnieuw op *f* 6.— vastgesteld.

De Secretaris-Penningmeester

Ir. J. J. TEKELENBURG.

ADRES VAN WIMECOS AAN DE MINISTER VAN ONDERWIJS, KUNSTEN EN WETENSCHAPPEN.

Rotterdam, 30 December 1953.

Aan Zijne Excellentie de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen,

Prinsessegracht,
's-GRAVENHAGE.

Excellentie,

Met verschuldigde eerbied wendt de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hogere Burgerscholen en Lycea (WIMECOS) zich tot Uwe Excellentie met het verzoek het vak mechanica, dat volgens artikel 16 van de Middelbaar-onderwijswet op de Hogere Burgerscholen-B moet worden onderwezen, op het programma van deze scholen als zelfstandig vak te handhaven.

Aanleiding tot dit verzoek is het adres van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging (N.N.V.) op 19 Augustus 1953 aan Uwe Excellentie verzonden, in welk adres op afschaffing van het zelfstandige vak mechanica werd aangedrongen. Het Bestuur van WIMECOS verwacht van een eventuele inwilliging van de wens van de N.N.V. een daling van het niveau van de wis- en natuurkundige vakken op de Hogere Burgerschool-B.

De omstandigheid, dat de Nederlandse Natuurkundige Vereniging verwijst naar haar vroeger adres van 11 Juni 1928 en het feit, dat ze

zich bereid verklaart tot het opstellen van een nieuw examenprogramma, daaraan toevoegend: „ongetwijfeld zullen ook de betrokken verenigingen van leraren hiertoe bereid zijn", brengen het Bestuur van WIMECOS ertoe het volgende onder de aandacht van Uwe Excellentie te brengen.

In 1928 zowel als in 1953 is de N.N.V. gekomen met het extremistisch advies de mechanica bij de natuurkunde in te lijven, terwijl in beide jaren de omstandigheden gunstig waren voor een reorganisatie van het mechanica-onderwijs met behoud van de mechanica als zelfstandig leervak.

In 1928 bestond er in principe overeenstemming tussen de Commissie-FOKKER, ingesteld door de N.N.V. en de Commissie-BETH, ingesteld door het College van Inspecteurs bij het Middelbaar Onderwijs, over de wenselijkheid van een empirisch-inductieve behandeling van de mechanica gevolgd door een mathematisch-deductieve behandeling; in 1951 werd er overeenstemming bereikt tussen de Vereniging van Leraren in Natuur- en Scheikunde (VELINES) en de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie (WIMECOS) inzake de modernisering van het mechanica-programma.

De N.N.V. heeft met WIMECOS generlei overleg gepleegd ten aanzien van de ingrijpende programma-wijzigingen, die ze thans in haar adres van 19 Augustus 1953 aan Uwe Excellentie heeft voorgesteld.

Voor het programma van het vak mechanica en voor het eindexamen in dit vak bestaat bij WIMECOS grote belangstelling. Dit moge blijken uit het feit, dat de samenwerkende verenigingen VELINES en WIMECOS op verzoek van het College van Inspecteurs bij het V.H.M.O. een programma voor het onderwijs in de mechanica als afzonderlijk leervak op de H.B.S.-B hebben ontworpen, welk programma in een adres van 20 April 1951 aan dit College werd aangeboden. In dit adres werd tevens aangegeven, in hoeverre het onderwijs in de mechanica zou kunnen worden gemoderniseerd en met het onderwijs in de natuurkunde, de cosmographie en de wiskunde zou kunnen worden gecoördineerd. Wijzigingen ten aanzien van de organisatie van het eindexamen werden niet voorgesteld; wel werd er gewezen op de betekenis die didactisch verantwoorde eindexamenopgaven kunnen hebben voor een goede contrôle op het onderwijs.

Het Bestuur van WIMECOS veroorlooft zich een afschrift van de desbetreffende gedeelten van het adres van 20 April 1951 als bijlage aan dit adres toe te voegen.

Het Bestuur acht de invoering van dit in gemeenschappelijk overleg tot stand gekomen programma van eminent belang voor een verantwoord onderwijs in de mechanica. Invoering van dit programma en examineren volgens de wenken in het adres aan het College van Inspecteurs vermeld, zijn naar de mening van het Bestuur van WIMECOS een betere bijdrage voor een verantwoord onderwijs in de exacte vakken dan de opheffing van het vak mechanica als zelfstandig vak, waarnaar de N.N.V. streeft.

Het Bestuur van WIMECOS dringt er daarom bij Uwe Excellentie op aan te willen bevorderen, dat een herziening van het mechanica-onderwijs in de geest van het ontwerp-programma opgesteld door VELINES en WIMECOS op korte termijn tot stand komt.

Namens het Bestuur van WIMECOS:
ir J. J. TEKELENBURG, secretaris
Mijnsheerenlaan 455 b, Rotterdam.

Bijlage bij het Adres van 30 December 1953 aan Zijne Excellentie de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, inzake het Mechanica-onderwijs.

A. *Programma voor de mechanica.*

Klasse 4.

Kinematica. Bewegingsgrootheden voor een stoffelijk punt, met toepassing op eenvoudige voorbeelden van beweging: valbeweging, harmonische beweging, worpbeweging en beweging langs een cirkel.
Translatie van een vast lichaam; rotatie van een vast lichaam om een vaste as.
Samenstelling van translatorische bewegingen.

Dynamica. Kracht en massa. Gewicht. Eenheden: meter-kilogram-kracht-seconde-stelsel; centimeter-grammassa-seconde-stelsel; meter-kilogrammassa-seconde-stelsel.
Parallelogram van krachten. Eenvoudige toepassingen stoffelijk punt op een horizontaal of een hellend vlak zonder wrijving; middelpuntzoekende kracht; mathematische slinger; beweging van verbonden punten, zonder wrijving.
Arbeid door een kracht verricht; algemeen geval en bijzondere gevallen (gewicht; kracht, recht evenredig met de afstand tot een punt; kracht, omgekeerd even-

redig met het kwadraat van die afstand). Arbeidsvergelijking.
Arbeidsvermogen van beweging en van plaats. Behoud van mechanisch arbeidsvermogen.
Wet van Newton; krachtvelden; potentiaal en potentiële energie. Beweging met wrijving; verlies van mechanisch arbeidsvermogen. Impuls van een kracht, hoeveelheid beweging van een stoffelijk punt (scalair). Impulsvergelijking.
Elastische botsing tegen een wand; elastische rechte botsing van stoffelijke punten. Toepassing op een ideaal gas.

Klasse 5. Samenstellen van krachten, die in één vlak op een vast lichaam werken en van evenwijdige krachten, ook als zij niet in één vlak werken.
Koppels in één vlak of in evenwijdige vlakken, op een vast lichaam werkend. Momentenstelling.
Het begrip zwaartepunt als middelpunt van massa. Ligging van het zwaartepunt van de volgende homogene lichamen: regelmatig prisma, driezijdig prisma, parallelepipedum, viervlak, regelmatige pyramide, kegel en bol.
Hoeveelheid beweging als vector.
Willekeurige botsing van twee lichamen.
Behoud van hoeveelheid beweging en van moment van hoeveelheid beweging bij een afgesloten stelsel.
Inleiding tot de begrippen traagheidsmoment en impulsmoment van een lichaam. Arbeid verricht door een koppel bij draaiing van het lichaam om een as loodrecht op het koppelvlak. Arbeidsvermogen van beweging van een lichaam, dat om een as draait.

B. *Over het eindexamen.*

Velines en Wimecos hebben ernstig de vraag onder ogen gezien, of wellicht door het laten vervallen van het centrale schriftelijk werk aan het onderwijs een vrijheid zou kunnen worden gegeven, die een organisch ingroeien van het nieuwe leerplan in het onderwijs zou kunnen bevorderen.

Vele leden der verenigingen achten een schriftelijke contrôle ongewenst; zeer velen echter maken tegen het verdwijnen van een schriftelijk examen ernstige bezwaren. Zij zijn van oordeel, dat een

goed ingericht schriftelijk examen het bovenbedoelde ingroeien beter zal bevorderen dan een uitsluitend mondelinge contrôle. Het verdwijnen van het schriftelijk examen stuitte op zo ernstige bezwaren, dat het voorstel hiertoe niet in beide verenigingen een meerderheid heeft kunnen vinden.

Wel zijn Velines en Wimecos beide van mening, dat alleen dan het concept-programma een bijdrage tot een beter mechanica-onderwijs zal kunnen leveren, als in de toekomst bij het schriftelijk werk afgezien wordt van het opgeven van ingewikkelde vraagstukken, die onevenredig veel rekenwerk vereisen, zoals die in het verleden wel voorkwamen. Eenvoudige, ongecompliceerde opgaven (deels in de trant van de C-opgaven van het natuurkunde-examen) zullen de ingewikkelder van weleer dienen te vervangen.

Naar het oordeel van beide verenigingen rust dan ook op de samenstellers van mechanica-opgaven voor het schriftelijk eindexamen in de toekomst de plicht door het opstellen van didactisch verantwoorde opgaven een goede contrôle van de in het concept-programma voorgestelde leerstof mogelijk te maken.

(Uit het adres van 20 April 1951 aan het College van Inspecteurs bij het V.H.M.O.).

NOG EENS: DE MEETKUNDE IN DE EERSTE KLAS

door

S. J. GEURSEN

Dat het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van een school voor V.H. of M.O. moeilijkheden oplevert, wordt door velen beweerd en is in mijn bijzijn nog door niemand tegengesproken.

Wat de leerling in de eerste klasse moet leren, kan men meer of minder scherp in twee delen verdelen; hij moet:

1e. methodisch leren werken en

2e. methodisch leren denken.

Het *methodisch leren werken* bestaat in:

a. het leren kennen en hanteren van het gereedschap,
b. het tekenen en construeren van meetkundige figuren,
c. een juist gebruik van letters en tekens,
d. het aanleren van de meetkundige terminologie,
e. het aanleren van de meetkundige symbolentaal,
f. het uitvoeren van eenvoudige schriftelijke meetkundige opdrachten, die (nog) geen enkel probleem bevatten.

De moeilijkheden, die de leerling bij het bovenstaande ondervindt zijn volstrekt niet onoverkomelijk. Beoefent hij deze stof niet, dan zal hij des te meer bezwaren ondervinden bij de beoefening van het hieronder volgende, ja, hij zal wellicht hierin geheel stranden.

Het *methodisch leren denken* omvat:

a. het vertrouwd raken met het begrip „definitie",
b. idem „stelling",
c. idem „axioma",
d. idem „werkstuk" en (of) „constructie",
e. het opsporen van „gegeven" en „te bewijzen" uit een in tekst voorgelegde stelling of opgegeven vraagstuk,
f. het stap voor stap opbouwen van een bewijs, dat bestaat uit een ketenredenering,
g. het overzien van „gegeven", „te bewijzen" en „bewijs" als een logisch en sluitend geheel,
h. het overzien van een groep definities en (of) stellingen als een groter geheel,
i. het overzien van de gehele opzet van het begin van de vlakke meetkunde als een bouwwerk.

Dit alles is voor een eerste-klas-leerling zeer moeilijk, volgens menigeen wellicht té moeilijk, in ieder geval veel en veel moeilijker dan het „methodisch werken". Het is echter het meest essentiële deel der vlakke meetkunde. Hier schuilt het eigenlijke nut en de doelstelling van het meetkunde-onderwijs, althans voor een groot deel.

Uitgaande van bovenstaande globale indeling van de stof kan men nu de volgende methoden van onderwijs onderscheiden:

I. Men volgt een der zeer vele bestaande leerboeken met een zo nauwkeurig mogelijke Euclidische opbouw op de voet, daarbij zich niet bekommerende om bovengenoemde *indeling* van de stof. Wie op deze wijze werkt, trekt in ieder geval geen profijt van de ervaringen, die anderen met deze methode hebben opgedaan.

II. Men besteedt eerst enige weken of maanden aan uitsluitend „methodisch leren werken" (hetgeen op vele en velerlei manieren mogelijk is) en gaat daarna over op systeem I.

De voordelen zijn groot. Het pad voor de eigenlijke „denk"stof wordt geëffend. Deze „denk"stof wordt echter zelve niet voorbereid. Vanaf een bepaalde dag wordt de leerling hiermede geconfronteerd. Talrijke verschillende onderwerpen uit deze stof worden hem door elkaar heen voorgezet. Ketenredeneringen en indirecte bewijzen, axioma's, definities en stellingen in bonte volgorde, moeilijke en gemakkelijke bewijzen, evidente en niet-evidente waarheden, alles in de volgorde, zoals „Euclides" het nodig vindt, doch niet in de volgorde, die de didactiek wellicht de voorkeur zou geven.

III. Men besteedt eerst zekere tijd aan „werk"methoden en daarna op even systematische wijze een bepaalde tijd aan „denk"-methoden.

Deze manier van werken is ongetwijfeld weer beter dan de vorige. Hierbij moet men er dus naar streven, zo enigszins mogelijk de hierboven onder „methodisch leren denken" opgesomde punten *a* tot en met *i* één voor één te berde te brengen. Het is echter de kunst dit zo te doen, dat men niet al te zeer met „Euclides" in conflict komt.

Tenslotte zal het wel een soort compromis worden tussen de eisen van „Euclides" en die van de didactiek, doch ieder, die dat werkelijk wil, zal er in kunnen slagen, in behoorlijke mate aan de eisen der didactiek te voldoen, zonder „Euclides" al te veel geweld aan te doen.

Het gaat er in dit artikeltje ook niet om, welke tussenweg nu tenslotte de aangewezene is (verschillende leraren zullen ver-

schillende wegen vinden), doch dat men bewust een tussenweg tussen de twee uitersten zoekt en niet één van de twee laat zegepralen ten koste van de andere.

Een nadeel van methode III is echter, dat de leerlingen tijdens het „methodisch leren werken" geruime tijd prettig en tamelijk gemakkelijk werk doen om dan plotseling zich te moeten verdiepen in voor hen zeer moeilijke (abstracte) en daardoor heel wat minder prettige leerstof.

IV. Men besteedt afwisselend een aantal lessen aan „werk"stof en aan „denk"stof, bij elk van deze twee soorten de bovengenoemde onder *a* tot en met *f* (resp. *i*) genoemde onderdelen zo enigszins mogelijk één voor één ter hand nemende (dit natuurlijk met de persoonlijke vrijheid van de leraar, hiervan naar omstandigheden af te wijken).

Op deze wijze wordt „gemakkelijk" en „moeilijk", „prettig" en „minder prettig", „belangrijk" en „bijkomstig" op aangename wijze met elkaar afgewisseld. Elk stukje moeilijke „denk"stof van enkele lessen wordt afgewisseld met lichte „werk"stof. De denkstof heeft telkens een goede gelegenheid om te bezinken en kan tijdens de lessen over „werk"stof in enkele minuten even worden gerepeteerd.

Ter toelichting van het bovenstaande geef ik hieronder aan, in welke bonte en volkomen ondoelmatige en voor hem onbegrijpelijke volgorde de leerling de stof toegediend krijgt, indien voor 100 % de Euclidische methode wordt gevolgd.

Hij maakt dan bijv. achtereenvolgens kennis met:

Eén axioma, één definitie (verlengde), één stelling (verlengde), één definitie (vlak), weer een axioma (lijn in vlak), enige definities (hoeken), één stelling (gestr. hoek), rekenwerk (over graden enz.), def. en stelling (overst. hoeken), bewijs van deze stelling, het parallellen-theorema, bevattende één definitie, één axioma, 10 stellingen, 2 bewijzen, die ver boven zijn vermogen uitgaan en 8 die dat niet doen, althans niet zo erg, enz., enz..

Een voorbeeld, hoe men volgens de bovenuiteengezette methode zou kunnen werken, volgt nu hier. Men zie het echter slechts als een *voorbeeld.* Men zal het zeer zeker ook anders kunnen doen. Het voorbeeld zij meer gegeven om de gevolgde gedachtengang toe te lichten.

De leerling krijgt dan achtereenvolgens te maken met:

1. Werk-oefeningen (W): Gereedschap, tekenen van vierkant, cirkel, klok, e.d..
2. Denk-oefeningen (D): *Definities* (alle soorten van hoeken).
3. W: Tekenen en schatten van hoeken.

4. W: Construeren, d.i. figuren tot stand brengen volgens de streng euclidische methode, dus met passer en liniaal, halveren van lijnstuk en hoek, evenwijdige lijnen, hoek van 60°, alles zonder bewijs.
5. D: *De Stelling*. „Gegeven" en „Te bewijzen" bij overstaande hoeken en nevenhoeken en de deellijnen daarvan; het bewijs kan men er wel eens bij geven, doch dit behoeven ze nog niet te reproduceren.
6. W: Namen, optredende bij twee lijnen gesneden door een derde.
7. D: *Het Bewijs*, (aan de hand van de tien stellingen uit het parallellentheorema). De twee moeilijke bewijzen (ook een indirect bewijs is nog veel te moeilijk) worden in onderlinge afspraak uitgesteld, doch de andere acht vormen door hun aantal, hun onderlinge overeenkomst en de mogelijkheid van kleine variaties een uitstekend oefenmateriaal. Met het formuleren hiervan en het opschrijven van „Gegeven", „Te bewijzen" en „Bewijs" wordt net zo lang omgesprongen, tot de leerlingen het vrijwel allen goed meester zijn. Ze vinden het niet zo vervelend, als men zou denken, omdat ze het (op den duur) wel kunnen en succes behalen na inspanning is prettig. Men neme hiervoor ruimschoots de tijd, kan er desnoods een soort spelletje van maken. Daarmee heeft men dan een stevige grondslag gelegd.
8. W: Een flinke „denk"pauze is nu nodig. Nu tekenen, rekenen (met graden, enz.), zwaartelijnen en bisectrices in een driehoek tekenen, enz..
9. W: De buitenhoek van de driehoek tekenen en aanwijzen.
10. D: *De Stelling en het Bewijs* (nl. over de buitenhoek en over de som der hoeken van een driehoek. Weer „Gegeven, „Te bewijzen" en „Bewijs").
11. W: Constructie van loodlijn, zonder bewijs, hoogtelijn in de driehoek, construeren van een driehoek uit drie elementen, uitknippen en op elkaar leggen van elkaars exemplaren.
    D: *De Congruentie*.

Ik hoop, dat de lezer niet zal denken, dat ik het bovenstaande nu als *de* juiste manier beschouw. Het is een van de vele pogingen. Er zullen ook andere en wellicht betere zijn, waarom niet? Het bovenstaande lijkt mij echter wel een gematigde manier van werken; anderen zullen wellicht veel verder willen gaan. In ieder geval wordt op bovenstaande wijze zeer efficiënt met de beschikbare tijd omgesprongen. Er worden nl. uitsluitend dingen gedaan, die vroeg of laat toch *moeten* gebeuren en dingen weggelaten of uitgesteld, die, als zijnde te moeilijk, voorshands nutteloos zijn.

HET DIFFERENTIËREN VAN DE EXPONENTIËLE FUNCTIES

door

Dr P. G. J. VREDENDUIN

1. Bij het onderwijs in de differentiaalrekening schrikt men er meestal van terug ook het differentiëren van de exponentiële functies te behandelen. De oorzaak is zonder twijfel gelegen in het vermoeden, dat dit te veel tijd kost of te moeilijk is. Het is echter mogelijk om deze differentiatie uit te voeren op zeer eenvoudige wijze en tegelijk daarmee het getal e in te voeren. Dit kost zo weinig inspanning, dat het jammer zou zijn het de leerlingen te onthouden.

We trachten eerst de functie 2^x te differentiëren.

$$\frac{d2^x}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} = c \, . \, 2^x.$$

Hierin is c de afgeleide van 2^x voor $x = 0$. (Omdat 2^x geen constante is, is $c \neq 0$.)

Nu differentiëren we a^x $(a > 0)$.

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{d2^{x\,{}^2\log a}}{dx} = \frac{d2^{x\,{}^2\log a}}{dx\,{}^2\log a}\,\frac{dx\,{}^2\log a}{dx} =$$

$$= c \, . \, 2^{x\,{}^2\log a} \, . \, {}^2\log a = c \, . \, {}^2\log a \, . \, a^x.$$

Omdat $c \neq 0$, is er een zodanige waarde voor a te vinden, dat

$$c \, . \, {}^2\log a = 1,$$

namelijk

$$a = 2^{\frac{1}{c}}.$$

Noem dit getal e. Dan is dus

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Hieruit volgt dan gemakkelijk op dezelfde wijze als hierboven

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \, . \, {}^e\log a.$$

We noemen nu ${}^{e}\log a$ de natuurlijke logarithme van a en schrijven deze ln a. Het afleiden van de formule

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x},$$

door middel van de stelling over het differentiëren van de inverse van een functie, kost nu nog maar weinig moeite.

De afleiding is in zoverre niet streng, dat verondersteld is, dat 2^x een (ergens) differentieerbare functie is. Een overwegend bezwaar kan ik hierin niet zien, ten minste wat de didactiek betreft.

2. Men kan zich nu afvragen, hoe men enig verder inzicht kan krijgen in de grootte en de eigenschappen van het getal e. Dit is op verschillende manieren mogelijk. Ieder moet zelf maar bepalen, wat hij wel en wat hij niet geschikt acht.

a. Teken nauwkeurig de grafiek van 2^x. Leid uit de figuur de waarde van de afgeleide van 2^x voor $x = 0$ af en bereken hieruit e. Mathematisch afgrijselijk, maar erg instructief.

b. Bereken met behulp van een tafel de waarde van $\frac{2^h - 1}{h}$ voor $h = \frac{1}{10}$ en $h = -\frac{1}{10}$ en leid daaruit twee grenzen af, waartussen e moet liggen. We vinden zo $2{,}62 < \mathrm{e} < 2{,}81$.

c. We weten reeds, dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1.$$

Hieruit volgt, dat voor h dicht bij 0 ongeveer (d.w.z. met geringe procentuele fout) geldt

$$\mathrm{e}^h = h + 1,$$

$$\mathrm{e} = (h + 1)^{\frac{1}{h}}.$$

Stellen we hierin $h = \frac{1}{n}$, dan vinden we dat voor grote n ongeveer

$$\mathrm{e} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

d.w.z., dat

$$\mathrm{e} = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Deze methode is ontleend aan: The teaching of calculus in schools, A report prepared for the mathematical association, London 1951, p. 45.

d. De functie e^x heeft de eigenschap gelijk aan 1 te zijn, als $x = 1$, en gelijk te zijn aan zijn eigen afgeleide voor elke waarde van x. We trachten nu opnieuw een dergelijke functie te vinden, dus een functie $f(x)$, waarvoor geldt $f(0) = 1$ en $f'(x) = f(x)$ voor elke x.

Omdat $f(0) = 1$ en dus $f'(0) = 1$, zal de functie in een omgeving van 0 ongeveer gelijk zijn aan $1 + x$. Deze functie voldoet niet aan de vraag, want de afgeleide is 1 en zou $1 + x$ moeten zijn. Om er voor te zorgen, dat de afgeleide $1 + x$ wordt, voegen we aan onze functie een correctieterm $\frac{1}{2}x^2$ toe. Maar dan moet aan de afgeleide ook een term $\frac{1}{2}x^2$ toegevoegd worden, hetgeen weer leidt tot een correctieterm $\frac{1}{2\,.\,3}\,x^3$, enz. Zo steeds doorgaande komen we tot de functie

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Van deze functie zien we gemakkelijk in, dat hij aan de beide gestelde voorwaarden voldoet (door „gewoon" term voor term te differentiëren).

Blijft over de vraag, of nu $f(x)$ dezelfde functie is als e^x. We beschouwen daartoe de functie $f(x) - e^x$. Deze functie is gelijk aan 0, als $x = 0$, en is voor elke waarde van x gelijk aan zijn eigen afgeleide. De grafiek gaat dus door de oorsprong, heeft daar de richting van de X-as en kan niet van richting veranderen, voordat hij de X-as verlaten heeft. Dan is het niet mogelijk, dat de grafiek van de X-as gaat afwijken. Dus is inderdaad voor elke x $f(x) = e^x$ [1]). Hieruit volgt

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

en in het bijzonder

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

3. Het lijkt mij van veel belang, dat iedere leerling op een dergelijke eenvoudige wijze alvast kennis neemt van het getal e. Dit kan later een juist begrip voor hem gemakkelijker maken (misschien tenzij hij speciaal wiskunde gaat studeren). Wat van het voorgaande aan te bevelen is, laat ik aan de individuele smaak over. Zelf geef ik de voorkeur aan 1 en 2*d*.

---

[1]) Volgens een mededeling van Dr A. van Haselen is dit resultaat eenvoudiger te verkrijgen door te bewijzen, dat de afgeleide van $\frac{f(x)}{e^x}$ gelijk aan 1 is.

DIDACTISCHE REVUE

I. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte,* zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität; Heinrich Behnke, Münster; Walter Lietzmann, Göttingen; Wilhelm Süss, Freiburg/Oberwolfach.

Band 3, Heft 3/4, 1953; Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

De bijzondere plaats die de ook voor Nederland zeer belangrijke „*Semesterberichte*" in de didactische wiskunde-literatuur innemen, wordt gekarakteriseerd door de volgende mededeling: „Diese Blätter dienen der mathematischen und physikalischen Weiterbildung auf den Hochschulen ausgebildeter Fachleute. Die Beiträge werden lediglich danach ausgewählt, wie weit sie diesem Gesichtspunkt gerecht werden. So grenzt sich die Zeitschrift gegenüber den Organen für die Forschung wie auch denen für mathematisch-physikalische Didaktik ab. Ihre Aufsätze werden vornehmlich von Professoren und Vertretern der höheren Schulen verfaszt, die sich dieser kulturellen Aufgabe unterziehen wollen."

Het tijdschrift wordt uitgegeven in samenwerking met de „*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*" en met de Duitse onderafdeling van de I.M.U.K. (Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission).

De belangrijke inhoud van dit „Heft" bestaat voor een groot deel uit verslagen van lezingen, die werden gehouden op de „Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts" in April 1953 te Münster i.W. en van de duitsche I.M.U.K.-sectie, waarvan Prof. Behnke voorzitter is. Deze is bovendien secretaris van de I.M.U.K., die onder voorzitterschap staat van Prof. Châtelet (Parijs).

Uit de inhoud:

1. *Wandel im Aufbau der Mathematik,* door Prof. H. Behnke. De schr. wijst erop, dat reeds in het aanvankelijk academisch onderwijs begrippen die een halve eeuw geleden niet of slechts in beperkte kring bekend waren, een rol spelen (b.v. groep, matrix, operator,

ring, lichaam, waardering), terwijl de wiskunde door deze abstracte begrippen toch niet „weltfremder" is geworden. De verandering in de structuur van de wiskunde wordt geschetst door een reeks van antwoorden op de vraag: „*Wat is meetkunde*?"

De auteur bespreekt het werk, dat onder het pseudoniem „Nicolas Bourbaki" verschijnt. Hierin wordt de gehele wiskunde zo opgebouwd dat men voor elke stelling nagaat, welke de „möglichst axiomarme Geometrie" is, waarin ze nog geldt. „Durch die veränderte Auffassung über die Struktur unserer Wissenschaft wird die Einordnung der mathematischen Disziplinen in das Gesamtgebäude unserer Wissenschaft völlig verschoben." Deze opvattingen leiden tot didactische konsekwenties, ook voor onze leerlingen, die men natuurlijk geen methode in de geest van Bourbaki kan voorzetten. „Die Frage nach der Notwendigkeit eines geeigneten didaktischen Aufbaues der Mathematik für ihre Schüler und die Frage nach einer möglichst zweckmässigen und im innersten Wesen der Mathematik begründeten Übersicht über unsere Wissenschaft durch den ausgereiften Fachmann sind zweierlei!"

In welke richting zal nu de wiskunde der 20ste eeuw invloed uitoefenen op onze schoolwiskunde? „Die Gruppen werden nicht die einzigen Vertreter einer Mutterstruktur bleiben, die neu in den Schulunterricht eindringen. Die Vektorrechnung hat sich auch ein Daseinsrecht im Schulunterricht erkämpft und musz andererseits, axiomatisch aufgefasst, auch zu den Mutterstrukturen gerechnet werden . . . Und auch der Ausweg im Schulunterricht kann auf die Dauer nur heissen: Axiomatisierung und Abstraktion — wenn auch alles natürlich in bescheidenerem Masse als in der Forschung und alles mit einer Phasenverschiebung von Jahrzehnten". Didaktisch van belang is nog de opmerking: „Man lege die Darstellung einer mathematischen Theorie nie so abstrakt und allgemein wie *möglich* an, sondern immer nur so abstrakt und allgemein wie *nötig*, um alle wesentliche Einsichten zu gewinnen. Übertriebene Abstraktion führt, wie nicht nur Felix Klein, sonder so viele der groszen Forscher betont haben, zur Unproduktivität und einer Verkennung der *wesentlichen* unter der Unzahl der *möglichen* mathematischen Einsichten."

2. „*Der einseitige Mathematiker, der Antimathematiker und der Mathematiklehrer als Erzieher der Jugend*" door dr K. Strunz.

De schr. merkt op: „Es gibt kein einziges Kulturgut, dasz nicht auch nachteilige Wirkungen haben könnte auf den Fortgang der objektiven Kultur, wie auch auf den nach Bildung strebenden

Menschengeist — nämlich dann, wenn die Methoden der betreffenden Wissenschaft und die Denkform, die sich aus der Beschäftigung mit ihr ergeben hat, bewuszt oder — was noch gefährlicher ist — unbewußt auf Aufgaben innerhalb der Kultur übertragen werden, denen jene Methoden und jene Denkform nicht angepasst sind, und wenn schliesslich die Gehalte einer speziellen Einzelwissenschaft philosophisch-weltanschaulich verabsolutiert werden."

Voor de eenzijdige beoefenaar der toegepaste wiskunde gelden vele eigenschappen die ook de beoefenaar der zuivere wiskunde bezit: „Auch er ist als Persönlichkeit ein sehr sachlicher Mensch, nüchtern, also relativ gefühlsfrei, er denkt logisch klar und schätzt die mathematische Methode in den Wissenschaften wie der Theoretiker. Der Bildungswert, und zwar jetzt vor allem der materiale Bildungswert steht ihm sehr hoch." Hoogste goed is voor beiden opv. het voorbrengen van nuttige goederen en de waarheid. De auteur tekent de eenzijdige wiskundige en de antimathematicus (zie als voorbeeld: Klages) in de samenleving der volwassenen en te midden van de jeugd onzer scholen. De problemen waarvoor beide typen ons plaatsen, worden van buitengewoon veel gewicht bij de opleiding van de wiskunde-leraren. De auteur noemt drie kategorieën van problemen, waarmee de docent zich buiten zijn eigenlijke vakwetenschap zal hebben te bemoeien:

1. mit der Stellung der mathematischen Wissenschaft im ganzen der Kultur- und Bildungsgüter;
2. mit der Psychologie, Typologie und Charakterologie der Schüler (und Lehrer);
3. mit den psychologischen Fragen der mathematischen Didaktik und Methodik.

Op elk dezer gebieden wordt de tegenstelling tussen de prowiskundigen en de anti-mathematici besproken.

Speciaal t.a.v. het meetkunde-onderwijs worden consequenties uit de gegeven beschouwingen betrokken.

3. Prof. dr W. Lorey geeft in „*Karl Friedrich Gausz, zur 175. Wiederkehr seines Geburtstages*" historische bijzonderheden over de jeugdjaren van Gausz, waarbij hij niet zozeer de bedoeling heeft aan wetenschappelijke prestaties relief te geven, dan wel de persoonlijkheid in het licht te stellen van deze geleerde, die „nicht nur der für seine Wissenschaft lebende Forscher war, sondern auch ein warmherziger, am Schicksal anderer mitfühlende deutscher Mann."

4. A. Kirsch schrijft over „die Pferchkugel eines Punkthaufens", waaronder hij verstaat de kleinste van alle bollen die alle punten van de verzameling als inwendige punten of als randpunten bevat. Is d(H) de diameter van de verzameling, dan is de straal van de „Pferchkugel" niet groter dan die van het regelmatige viervlak met d(H) als ribbe.

5. J. G. von Bohl schrijft over *„Konforme Abbildung im Schulunterricht."*

De auteur neemt de stereografische projectie en de Mercatorprojectie als eenvoudige voorbeelden van conforme afbeelding, en illustreert aan de hand hiervan de fundamentele eigenschappen dezer afbeelding. Hij ziet hierbij af van de complexe schrijfwijze.

Aan het eind van het artikel wordt het differentiëren van complexe functies besproken en wordt bewezen dat door elke differentieerbare functie een conforme afbeelding tot stand gebracht wordt.

6. Uit het artikel van K. Wigand over *„die stundenzahlmässige Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den deutschen höheren Schulen"* citeer ik: „Zu der Entwikelung der Mathematik und der technischen Wissenschaften mag man stehen wie man will, man mag sie bedauern oder begrüssen. Man kan sie aber nicht leugnen oder aufhalten. Diese Wissenschaften bilden nicht nur eine Grundlage unserer wirtschaftlichen Existenz, sie sind auch für die Welt die ausgeprägtesten Schöpfungen abendländischer Kultur. Dieser Einsicht zuwider sind durch schädliche Einflüsse die Stundenzahlen, z.B. für Mathematik, besonders seit der Wende des so hoffnungsfroh begonnenen Jahrhunderts, ständig gesenkt oder eingeschränkt worden. Es wäre an der Zeit, diesen verhängnissvollen Kurs zu ändern."

7. Prof. dr. J. E. Hoffmann, *Über eine altindische Berechnung von π und ihre allgemeine Bedeutung.*

8. K. Zeller, *Kondensation von Singularitäten.*

9. A. Baur, *Die näherungsweise Lösung von Gleichungen.*

10. H. Rau, *Zur Entwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.*

11. G. Ronge, *Zur historischen Entwicklung physikalischer Grundbegriffe; Geschehen und Bewegung in der vorsokratischen Naturphilosophie.*

12. Tagungsberichte; Buchbesprechungen; Bücherschau.

II. *The Mathematics Teacher*, Volume XLVI, Number 6, October 1953, Washington.

Uit de inhoud:

1. M. Rees, *Modern mathematics and the gifted student.* In dit artikel beschrijft de auteur enige gebieden van onderzoek, waar begaafde leerlingen der „colleges" emplooi kunnen vinden. In de eerste plaats wijst ze op het wiskunde-program van de „Office of Naval Research". Het aantal vacatures in industrie en zakenleven voor mathematici neemt voortdurend toe; „the concomitant expansion of the number of professional openings in the world of business and industry for students with mathematical training reflects the fact that mathematics is constantly demonstrating on a broader front its substantial contributions in large segments of our economic life . . . The postwar years have seen a flowering in America not only of work in pure mathematics — and America is now one of the world leaders in this field — but also of work in mathematical statistics, in electronic computers, in what I call classical applied mathematics (a study of continuum mechanics by analytical method), in certain aspects of mathematical economics, and in operations research."

Ten aanzien van de industrie constateert de schrijfster: „Ph. D.'s in statistics are in low supply, and even a modest amount of graduate work in statistics is extremely useful in getting a job in industry or government."

Op het terrein der rekenmachines luidt haar oordeel: „There are the coders for whom high-school training is probably sufficient, the programmers who need a good bachelor's degree in mathematics, and the analysts who require a very broad background in mathematics and related subjects." De schrijfster zou in verband hiermee het wiskundig program op de high-school door de moderne rekentechniek willen laten beinvloeden en o.m. willen opnemen: het tweetallig stelsel, eenvoudige iteratiemethoden voor het oplossen van lineaire vergelijkingen en werken met benaderingen.

Een ander gebied van toenemende wiskundige werkzaamheid is dat van de wiskundige economie en dat van de „operations research". Dit wordt gedefinieerd als „the application of the techniques of the physical sciences to the study of the operations of war and peace."

Voorts kan men wiskundigen gebruiken in de vliegtuigindustrie, bij actuariële arbeid en in de industriële research. De schrijfster bespreekt i.h.b. de kansen voor vrouwen in diverse wiskundige beroepen.

Aan het eind pleit ze voor betere leerboeken.

„We need books written in a way that will appeal to young people, that tell of some of the exciting successes, and that particularly explain some of the unsolved problems. Our students need contact with research people so that they will know what mathematics is alive. I consider it a dreadful failure of our educational process that so many students graduate from college utterly unaware that new and vital results in mathematics are being found daily. Our students need to appreciate the great scope and depth and variety of mathematics, and they need to know that the most effective mathematician is a cultivated person with a broad education outside mathematics. The future is . . . rich in opportunity for well-trained mathematics".

2. G. Risden schrijft over het aanvankelijk rekenonderwijs in „*What is wrong with school-arithmetic*".

„What is wrong with schoolarithmetic is too little understanding, too little use of the higher mental processes, too much finding answers, not enough finding „how much" and „how many", too much repetition of someone else's generalization (meaningless to the one who has had no opportunity to make it for himself) and not enough opportunity to experience, to abstract and to generalize for oneself." — „Let's give our young ones a chance to put quantities together and take them apart".

3. In „*Angular measure — enough of its history to improve its teaching*" beschouwt Ph. S. Jones historisch het gebruik van de begrippen: graad, radiaal en „mil". Een echte mil" blijkt 1/1000 radiaal te zijn, maar in het leger heeft men een cirkelomtrek gelijk 64000 mil gesteld. „. . . though it is not the writer's opinion that either the radian or the mil per se is an essential part of general education nor that the latter should ever be taught for mastery, it is his contention that teaching angular measure with attention to different units, and to the interrelated stories of their history which also involves their logical bases, names, and applications, will produce meaning, understanding, insights, appreciations, and even pleasure."

4. W. L. Schaaf geeft in de afdeling „*References for mathematics teachers*" een achttal kolommen literatuuropgaven over „Map Projections and Cartographie".

5. De afdelingen: Aids to teaching, mathematical miscellenea, what is going on in your school, devices for a mathematics laboratory,

en book section, bevatten nog zeer veel waardevol didactisch kleingoed.

III. *The Mathematics Teacher*, Volume XLVI, Number 7, November 1953, Washington.

Uit de inhoud.

1. Opgenomen is een verslag van de lezing gehouden door B. E. Meserve (University of Illinois) op de jaarvergadering van wiskundeleraren te Iowa (Oct. 1952) over *„Topology for secondary schools"*.

De bedoeling van de voordracht is om aan te tonen „that topology has significance and meaning for mathematics teachers and for pupils in secondary schools".

De schr. gaat na, welke rol het continuïteitsbegrip (fundamenteel in de topologie) speelt in de wiskunde van ons voortgezet onderwijs.

De volgende topologische vraagstukken worden besproken:

a. Drie huizen liggen op een rij; drie bomen staan op een andere rij. Verbind elk der huizen met elk der bomen door een pad. Zorg dat de 3 paden elkaar niet snijden.

b. Op een boog *a* liggen de punten 1, 2 en 3; op een tweede boog *b* de punten 1', 2' en 3'. Verbind 1 met 1', 2 met 2' en 3 met 3' en zorg dat de verbindingsbogen elkaar niet snijden en ook de bogen *a* en *b* niet snijden.

c. Hoeveel kleuren heeft men minstens nodig om te zorgen, dat de *n* landen van een kaart zodanige kleuren hebben, dat geen twee landen aan weerzsijden van eenzelfde grenslijn dezelfde kleur krijgen?

d. Van elk der oevers A en B van een rivier gaan 2 bruggen naar het in de rivier gelegen eiland C en 1 brug naar het in de rivier gelegen eiland D. Een zevende brug verbindt de eilanden C en D.
Is het mogelijk een wandeling te maken waarbij men één en niet meer dan éénmaal over elk der bruggen komt?

e. De band van Möbius.

2. M. L. Wilt (College of Education, West Virginia University) werkt een „unit" uit over de geschiedenis van de rekenkunde voor de *„seventh and eighth grade mathematics classes"*.

Aan het eind van het jaar moeten de leerlingen in staat zijn een opstel te schrijven over enkele van de volgende onderwerpen.

My number system and why I should know how to use it accurrately. Numerology. The story of the calendar. The two types of Egyptian numerals. How nature uses numbers. How numbers got their names. Fun with the number nine. Magic squares and circles. Number names beyond billions. The number system of the Maya Indians. The story of zero. My own number system. Number names in several different languages. Counting with pebbles. Arithmetical words I should know.

3. E. L. Moore geeft in *„The carpenter's rule: an aid in teaching geometry"* aan, hoe een opvouwbare timmermansliniaal aan het

meetkundeonderwijs t.a.v. lijnen, hoeken, driehoeken en veelhoeken dienstbaar gemaakt kan worden.

4. C. B. Read (University of Wichita, Kansas) wijst in „*Comments on computation with approximate numbers*" op het veelvuldig insluipen van onbetrouwbare cijfers in berekeningen en geeft aanwijzingen voor het weren van deze onbetrouwbare cijfers.

5. In „*Elementary techniques in maxima and minima*" geeft J. A. Tierney (U.S. Naval Academy, Annapolis) een vijftal ook voor onze scholen bruikbare voorbeelden.

6. D. B. Lloyd (Wilson College, Washington) wijst in de bijdrage: „*Ultra-curricular stimulation for the superior student*" op een enquête in 1902 gepubliceerd in „l'Enseignement Mathématique". waaruit blijkt, dat de meeste wiskundigen hun voorliefde voor het vak kregen in de middelbare-school-leeftijd.

Uit de verdere inhoud noemen we nog:

a. F. S. Nowlan, *the solution of a radical equation.*
b. *Report* to the Illinois section of the Mathematical Association of America of its Committee on the Strengthening of Mathematics Teaching.
c. Bijdragen van Ph. S. Jones over „Bibliographia Historica" en „The oldest american slide rule".
d. In „References for mathematics teachers" geeft W. L. Schaaf een literatuurlijst onder de titel: „*Just what is mathematics*".
e. *Devices for a Mathematics Laboratory.*
f. *What is going on in your school?*
g. *Book section.*

IV. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht,* 6. Band, 5. Heft, 1953/54; Bonn-Frankfurt.

Uit de inhoud:

1. *Naturwissenschaft und Religion,* door dr R. Wolff.

De auteur gaat na welke bijdrage het schoolonderwijs kan leveren voor een kosmologisch „Godsbewijs".

2. *Die Problemlage in der menschlichen Erblehre,* door Prof. dr F. Keiter.

3. *Die Entwicklung des anorganischen Naturbildes im 19. und 20. Jahrhundert* door dr B. Steffen.

De wiskundige bijdragen in deze aflevering zijn maar van beperkte omvang. We noemen:

a. Über die *Rechenbücher* der Brüder Gisebertus und Gerardus Holmer, Münster 1662, door dr K. Zita.
Deze geschreven rekenboeken elk van 320 blz. geven een beeld van het rekenonderwijs in de 17e eeuw op het Jezuieten-Gymnasium te Münster. Ze doen methodisch denken aan de rekenkunde van Rainer Gemma Frisius (1508—1555).
b. *Konstruktion der Ellipse mit drei Krümmungskreisen,* door Prof. dr. O. Botsch.
c. *Der vierte Punkt,* door dr R. Laemmel.
Nagegaan wordt, hoe de kromtecirkel in een punt van een ellips ligt t.o.v. die ellips, en van het vierde snijpunt van ellips en cirkel worden de coördinaten bepaald.
d. *Kurvendiskussion,* door H. Stubbe.
Deze bijdrage bevat didaktische aanwijzingen voor de behandeling van gebroken functies, waarvan de teller hoogstens van de vierde en de noemer hoogstens van de derde graad is.

Een rectificatie t.a.v. de bijdrage over het eindexamen in Oost-Duitsland vermeldt, dat niet H. Hoffmann, maar H. Bunese de inzender is („Zur Reifeprüfung 1952 in der DDR").

V. *Paedagogische Studien,* XXX, afl. 12; December 1953. J. B. Wolters, Groningen.

Twee belangrijke artikelen uit dit nummer zijn aanleiding lezing van dit nummer aan alle docenten zeer aan te bevelen.
1. Prof. dr M. J. Langeveld schrijft over „*De pubescent en het ordeprobleem; enkele aspecten*".

Het ordeprobleem, dat niet enkel een probleem is van *die* docent met *die* klasse, raakt de gehele schoolorganisatie en schoolsituatie, de docent èn de leerling. Op indringende wijze legt de schr. de oorzaak van vele conflicten bloot en geeft zowel voor de leraar mèt orde als voor de leraar zonder orde opmerkingen die van nut kunnen zijn bij pogingen tot verbetering van de toestand.
2. Prof. dr H. W. F. Stellwag schrijft over „*Spieken*".

Hoe denken de leerlingen over het spieken? Doen ze het allemaal? Hoe gaan ze te werk? Keuren ze het verschijnsel goed of niet goed? Deze verschijnselen kunnen alleen op grond van door de leerlingen zelf verstrekte gegevens bevredigend beantwoord worden. De resultaten van een proef-enquête worden besproken. Een uitgebreider onderzoek zal volgen.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr O. BOTTEMA

XXXIII. *Over de baan van een weggeschoten projectiel.*

1. In dit tijdschrift (Euclides, **28**, 1952—53, 166—173) heeft J. Muilwijk nog eens de aandacht gevraagd voor de *ontsnappingssnelheid*: de minimale snelheid v_0 waarmede men op aarde een projectiel moet wegschieten opdat het niet terugkere. Uit beschouwingen over de kinetische en de potentiële energie volgt zonder moeite, dat $v_0^2 = 2gR$, waarin g de versnelling van de zwaartekracht op de aardoppervlakte en R de straal van de aarde voorstelt. Op pg. 171 wordt terecht de opmerking gemaakt, dat het niet nodig is het projectiel verticaal weg te schieten, maar dat bij vertrek onder een zekere elevatiehoek hetzelfde minimum geldt. Men zou zich nog kunnen afvragen of de parabolische baan, die het projectiel dan beschrijft, de aardoppervlakte niet zou kunnen ontmoeten. Dit blijkt inderdaad bij nadere beschouwing onmogelijk, op grond van de stelling, dat een parabool met een cirkel, die het brandpunt tot middelpunt heeft, hoogstens twee reële punten gemeen kan hebben, waaruit dan volgt, dat de top van de parabolische baan binnen de aarde valt én de buiten de aarde gelegen boog zich tot in het oneindige uitstrekt. Het artikel inspireerde tot de vraag, *waar en wanneer het projectiel op aarde terugkeert als het wordt weggeschoten met een snelheid* $v < v_0$. Bij deze beschouwing van de worpbeweging op de bolvormige aarde ontmoet men enkele bijzonderheden, die misschien niet algemeen bekend zijn.

Wij denken ons het projectiel weggeschoten vanuit het punt A op aarde (fig. 1) onder de elevatiehoek α $\left(0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, met de snelheid v. Om de baan te beschrijven gebruiken wij poolcoördinaten r en φ; de voerstraal is OP en φ is de hoek AOP. Is M de massa van de aarde en m die van het projectiel, dan is de kinetische energie $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ en de potentiele $-\frac{fMm}{r}$, waarin f de gravitatieconstante is. Uit $\frac{fM}{R^2} = g$ volgt, dat de potentiele energie als $-\frac{mgR^2}{r}$ geschreven kan worden en de energievergelijking luidt dus

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2gR^2}{r} = v^2 - 2gR \tag{1}$$

Uit de tweede wet van Kepler over de constante perksnelheid volgt

$$r^2\dot{\varphi} = Rv \cos \alpha \tag{2}$$

Uit (1) en (2) kan men op de welbekende wijze de vergelijking van de baan afleiden. Eliminatie van de tijd levert

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 - \frac{2g}{v^2 \cos^2 \alpha} r^3 - \frac{v^2 - 2gR}{R^2 v^2 \cos^2 \alpha} r^4 = 0$$

die voor $r = \frac{1}{u}$ overgaat in

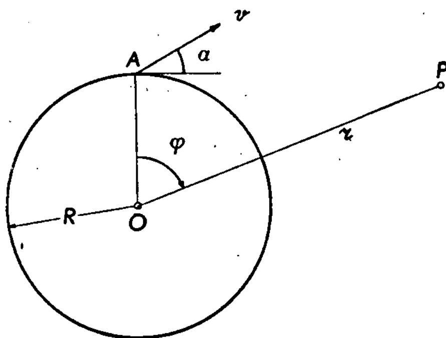


Fig. 1.

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2g}{v^2 \cos^2 \alpha} u - \frac{v^2 - 2gR}{R^2 v^2 \cos^2 \alpha} = 0 \tag{3}$$

Differentiatie naar φ geeft

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{g}{v^2 \cos^2 \alpha} = 0$$

met de algemene oplossing

$$u = A \cos (\varphi - \varphi_0) + \frac{g}{v^2 \cos^2 \alpha}, \quad 0 \leqq \varphi_0 < \pi$$

waarin A en φ_0 integratie constanten zijn. Bij substitutie in (3) blijkt

$$A^2 = \frac{(Rg - v^2 \cos^2 \alpha)^2 + v^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{R^2 v^4 \cos^4 \alpha}$$

en de vergelijking van de baan is dus

$$r = \frac{Rv^2 \cos^2 \alpha}{B \cos (\varphi - \varphi_0) + Rg} \tag{4}$$

waarin $\qquad B^2 = (Rg - v^2 \cos^2 \alpha)^2 + v^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \qquad (5)$

De vergelijking (4) stelt, zoals welbekend is, een kegelsnede voor met O tot brandpunt. Daar $R^2g^2 - B^2 = v^2 \cos^2 \alpha(2Rg - v^2)$, is deze uitdrukking voor $v^2 < 2gR$ positief. Er is dùs geen waarde van φ waarvoor de noemer van (4) gelijk aan nul wordt, r blijft dus eindig, m.a.w. *de baankromme is een ellips.*

2. In vergelijking (4) komt nog de integratie-constante φ_0 voor, die bepaald kan worden uit de voorwaarde, dat de baan door het beginpunt $r = R$, $\varphi = 0$ gaat.

Die waarden van φ waarvoor r extreem is, duiden blijkbaar de richting van de lange as van de ellips aan. Deze waarden zijn die waarvoor $\cos(\varphi - \varphi_0) = \pm 1$, d.w.z. $\varphi = \varphi_0$ en $\varphi = \varphi_0 + \pi$. Voor $\varphi = 0$ is $r = R$ en bij toenemende waarde van φ neemt blijkbaar r aanvankelijk toe. De maximale waarde van r wordt dus het éérst bereikt, waaruit weer volgt, dat voor B de negatieve der uit (5) volgende waarden moet worden genomen.

φ_0 wordt bepaald door de eis, dat voor $\varphi = 0$ r gelijk aan R moet zijn. Wij hebben dus, zoals uit (4) blijkt

$$\cos \varphi_0 = \frac{(Rg - v^2 \cos^2 \alpha)}{B_1} \tag{6}$$

waarin

$$B_1 = + \{(Rg - v^2 \cos^2 \alpha)^2 + v^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\}^{1/2} \tag{7}$$

Voor het tweede snijpunt van de baan met de aardoppervlakte geldt evenzeer $r = R$, dus $\cos(\varphi - \varphi_0) = \cos \varphi_0$, dus $\varphi = 2\varphi_0$. De afstand tussen beginpunt A en eindpunt B van de kogelbaan is dus in boogmaat gelijk aan $2\varphi_0$, dat is, zoals ook uit symmetrie-overwegingen volgt, het dubbele van de hoek tussen OA en de voerstraal naar de top van de baan.

Uit (6) en (7) volgt

$$\sin^2 \varphi_0 = 1 - \cos^2 \varphi_0 = \frac{B^2 - (Rg - v^2 \cos^2 \alpha)^2}{B^2} = \frac{v^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{B^2}$$

dus

$$\sin \varphi_0 = \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{B_1}$$

en tenslotte de fundamentele betrekking

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{Rg - v^2 \cos^2 \alpha} \tag{8}$$

of

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sin 2\alpha}{k - \cos 2\alpha} \tag{9}$$

waarbij

$$k = \frac{2Rg - v^2}{v^2} > 0 \tag{10}$$

3. Bij de discussie van deze uitkomst blijkt het noodzakelijk naast de ontsnappingssnelheid $v_0 = \sqrt{2Rg}$ nog *een tweede kritische snelheid* te beschouwen, nl. $v_1 = \sqrt{Rg}$. Wij onderscheiden de gevallen *a*) $v < v_1$, *b*) $v = v_1$, *c*) $v_1 < v < v_0$. Voor v_1 geldt $v_1 = \frac{1}{2} v_0 \sqrt{2}$. Voor $g = 10^3$ cm/sec², $R = 64.10^7$ cm vindt men $v_0 = 11{,}3$ km/sec en $v_1 = 8{,}0$ km/sec. Voor de drie gevallen geldt respectievelijk $k > 1$, $k = 1$ en $k < 1$.

a) $v < \sqrt{Rg}$, $k > 1$.

Beschouwen wij eerst het geval $\alpha = 0$. Dan is $\varphi_0 = 0$. De vergelijking (4) van de baan luidt nu

$$r = \frac{Rv^2}{-(Rg - v^2)\cos\varphi + Rg}$$

waaruit volgt

$$R - r = R\,\frac{(Rg - v^2)(1 - \cos\varphi)}{Rg - (Rg - v^2)\cos\varphi}, \tag{11}$$

zodat $R - r = 0$ voor $\varphi = 0$ en $R - r > 0$ voor $\varphi \neq 0$. De baan zou dus geheel binnen de aardoppervlakte liggen. M.a.w. *een in dit geval horizontaal weggeschoten projectiel verlaat de aarde niet.*

Voor $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ is de uitdrukking (9) positief, waaruit volgt $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, zodat $0 < 2\varphi_0 < \pi$. De worpswijdte is dus kleiner dan de halve aardomtrek. De grootste afstand van de aarde wordt bereikt voor $\varphi = \varphi_0$; de maximale voerstraal is dus

$$r_1 = \frac{R(Rg + \sqrt{(Rg - v^2\cos^2\alpha)^2 + v^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha})}{2Rg - v^2} \tag{12}$$

en de grootste hoogte boven de aardoppervlakte is

$$h = r_1 - R = R\,\frac{\sqrt{(Rg - v^2\cos^2\alpha)^2 + v^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - (Rg - v^2)}{2Rg - v^2} \tag{13}$$

Uit (8) of (9) volgt voor $k > 1$ dat $\operatorname{tg}\varphi_0 < \operatorname{cotg}\alpha$, dus $\varphi_0 < \frac{\pi}{2} - \alpha$ waaruit wij de conclusie trekken, dat de ellips waarvan de baan een boog is, voor het grootste deel binnen de cirkel met straal R ligt (zie fig. 2).

Wij stellen de vraag voor welke elevatiehoek bij gegeven beginsnelheid v de worpswijdte *maximaal* is. De voor $k > 1$ niet-negatieve

functie $\frac{\sin x}{k - \cos x}$ is nul voor $x = 0$ en voor $x = \pi$; de afgeleide naar x is $\frac{k \cos x - 1}{(k - \cos x)^2}$ en dus gelijk aan nul voor $\cos x = \frac{1}{k}$. De maximale worpsafstand wordt dus bereikt bij de elevatiehoek waarvoor $\cos 2\alpha = \frac{v^2}{2Rg - v^2}$; deze hoek is steeds kleiner dan $\frac{\pi}{4}$. De maximale boogafstand $2\varphi_0$ volgt uit

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} = \frac{v^2}{2\sqrt{Rg(Rg - v^2)}}.$$

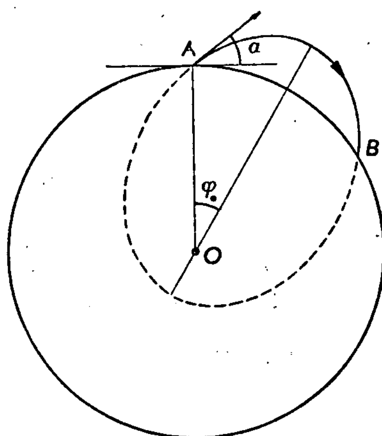


Fig. 2

Voor kleine waarde van v gaan de resultaten over in die van de worpbeweging der elementaire mechanica. Voor de uitdrukking (13) vinden wij

$$h \sim R \frac{Rg\left(1 - \frac{2v^2\cos^2\alpha}{Rg} + \ldots\right)^{1/2} - \left(Rg - v^2\right)}{2Rg - v^2} =$$

$$R \frac{Rg\left(1 - \frac{v^2\cos^2\alpha}{Rg} + \ldots\right) - \left(Rg - v^2\right)}{2\,Rg - v^2} = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

terwijl voor de worpswijdte geldt $2\varphi_0 \sim 2\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{2v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{Rg}$

zodat $$2R\varphi_0 = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

b) $v = v_1 = \sqrt{Rg}$, $k = 1$.

Voor $\alpha = 0$ volgt uit (11) voor de vergelijking van de baan: $r = R$. *Het horizontaal weggeschoten projectiel beweegt zich dus langs de aardomtrek.* Inderdaad is v_1 de snelheid waarbij zwaartekracht en middelpuntvliedende kracht elkaar opheffen.

In het algemeen is het mogelijk de tijd te berekenen, die een worpbeweging duurt. Uit (2) en (4) kan men $\dot{\varphi}$ bepalen als functie van φ en daaruit volgt dan de gevraagde tijd door het berekenen van een elementaire integraal. Het antwoord lijkt echter geen eenvoudige functie van v en α, zodat wij de berekening niet weergeven.

In ons geval is het antwoord zeer eenvoudig; de snelheid is $\sqrt{Rg}$, de omtrek $2\pi R$, dus na $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ is het punt in A terug.

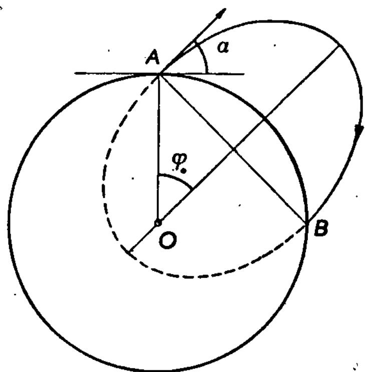


Fig. 3

Voor $v_1 = 8.10^5$ cm/sec, $2\pi R = 4.10^9$ cm vindt men $T = 5.10^3$ sec $= 1$ uur 23 min. Dit antwoord, dat blijkbaar de trillingstijd voorstelt van een mathematische slinger ter lengte van de aardstraal, in een homogeen veld met versnelling g, is een bekend getal uit de theorie der gyroscoop: het stelt volgens een van Schuler afkomstige stelling de slingertijd voor van een gyroscopisch kompas, dat zich onafhankelijk gedraagt tegenover versnellingen van het schip.

Voor $\alpha > 0$ zal de baan een ellips zijn. Uit (9) volgt, dat $\operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{cotg} \alpha$, zodat de lange as van de baan evenwijdig loopt met de beginsnelheid. Het beginpunt A en het eindpunt B zijn dus de uiteinden van de korte as: van de omtrek van de ellips ligt evenveel binnen als buiten de cirkel. Bij gegeven A en gegeven elevatiehoek α vindt men B als uiteinde van de koorde door A loodrecht op de beginsnelheid. Met uitzondering van het geval $\alpha = 0$ wordt dus de worpswijdte kleiner dan π (zie fig. 3).

c) $v > \sqrt{Rg}$, $k < 1$.

Wij nemen weer eerst $\alpha = 0$ en constateren op grond van (11) dat $R - r$ thans voor $\varphi \neq 0$ positief is, *zodat de in A rakende baan geheel om de aarde heen loopt* (fig. 4); φ_0 is nu gelijk aan π. De maximale voerstraal r_1 is $\dfrac{Rv^2}{2Rg - v^2}$ en de grootste hoogte h wordt

$$\frac{2R(v^2 - Rg)}{2Rg - v^2}.$$

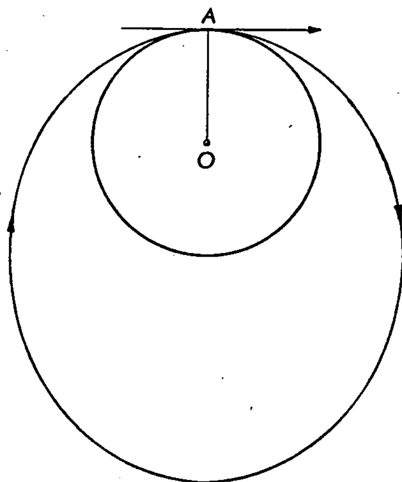


Fig. 4

De halve assen der ellips zijn $\dfrac{Rg^2}{2Rg - v^2}$ en $\dfrac{v^2}{g}$, de omlooptijd wordt $\dfrac{2\pi Rv}{2Rg - v^2}$.

Voor $\alpha > 0$ heeft de functie tg φ_0 een geheel ander verloop dan in geval *a*). Een maximum van φ_0 is thans niet aanwezig. Bij van nul af toenemende waarde van α neemt tg φ_0 af en is dus negatief; voor $\cos 2\alpha = k$, dus voor $\cos \alpha = \sqrt{\dfrac{Rg}{v^2}}$ is $\text{tg}\varphi_0 = \infty$, daarna is tg φ_0 positief en tot nul afnemend als $\alpha \rightarrow \dfrac{\pi}{2}$. Uit dit alles volgt dat $2\varphi_0$ in het interval $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ monotoon afneemt van 2π tot 0. Hoe groter de elevatiehoek, hoe kleiner de worpswijdte.

Uit (8) volgt, dat thans tg $\varphi_0 >$ cotg α, dus $\varphi_0 > \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, zodat het grootste deel van de ellips buiten de aarde ligt. (fig. 5). Voor

kleine waarde van α ligt B in de buurt van A (fig. 6). Uiteraard is het ook mogelijk het projectiel zo te richten, dat het terecht komt in de antipode van A (fig. 7). Daarvoor is nodig, dat $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$; daaruit volgt, dat voldaan moet worden aan de voorwaarde $v^2 \cos^2 \alpha = Rg$.

XXXIV. Een door twee gegevens bepaalde driehoek.

De opgave: „Van driehoek ABC waarvan $2s$ de omtrek en m_c de zwaartelijn uit C voorstelt, is gegeven

$$m_c^2 + c^2 = \frac{3}{46}(4s - b)^2;$$

bepaal de hoeken", lijkt onredelijk omdat zij in strijd is met de regel dat een driehoek door *drie* en zijn vorm dus door *twee* gegevens wordt bepaald. Spoedig blijkt dat de conditie de verhoudingen der zijden a, b en c ondubbelzinnig vastlegt. Werkt men haar uit met behulp van $m_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$ en $2s = a + b + c$, dan ontstaat $F(a, b, c) = 22a^2 - 24ab - 48\,ac + 40b^2 - 24bc + 45c^2 = 0$.

Voor de functie F, die homogeen kwadratisch is in de veranderlijken a, b, c geven de voorwaarden

$$\frac{dF}{da} = \frac{dF}{db} = \frac{dF}{dc} = 0$$

respectievelijk de lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 11a - 6b - 12c &= 0 \\ 3a - 10b + 3c &= 0 \\ 8a + 4b - 15c &= 0 \end{aligned}$$

waarvan men onmiddellijk inziet dat zij een afhankelijk stelsel vormen en slechts de oplossingen $a : b : c = 6 : 3 : 4$ toelaten.

Beschouwt men a, b en c als de homogene coördinaten van een punt in het projectieve vlak, dan stelt $F = 0$ een kegelsnede voor met een dubbelpunt, dus een in twee rechten ontaarde figuur. Snijdt men haar met een niet door het dubbelpunt gaande rechte, b.v. met $c = 0$, dan blijken de snijpunten niet reëel te zijn. De figuur bestaat dus uit twee toegevoegd imaginaire rechten, die elkaar in het reële punt (6, 3, 4) snijden. Aan $F = 0$ voldoet dus slechts één reële getallengreep a, b, c. Onafhankelijk van deze meetkundige hulpmiddelen komt men tot de zelfde conclusie door op te merken dat $F = 0$ geschreven kan worden als

$$3(4b - 3c)^2 + 3(6c - 4a)^2 + 2(3a - 6b)^2 = 0$$

waarvan de enige reële oplossing volgt uit

$$4b - 3c = 6c - 4a = 3a - 6b = 0.$$

Daar van de drie positieve getallen $a = 6$, $b = 3$, $c = 4$ de grootste kleiner is dan de som der beide andere, is er inderdaad één en slechts één klasse van onderling gelijkvormige driehoeken die aan de gegeven voorwaarde voldoen.

Enkelvoudige voorwaarden, die de vorm van de driehoek volledig bepalen, zijn natuurlijk algemeen bekend. Zo wordt de *gelijkzijdige driehoek* geheel bepaald door elk der voorwaarden: $R = 2r$, de afstand van de middelpunten van de om- en de ingeschreven cirkel is nul, de hoek van Brocard is 30°, $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$. Uit het bovenstaande blijkt nog eens dat men bij elke driehoek $A_1B_1C_1$ een conditie kan opschrijven die slechts voor deze driehoek en voor alle daarmee gelijkvormige driehoeken geldt, nl.

$$p(c_1b - b_1c)^2 + q(a_1c - c_1a)^2 + r(b_1a - a_1b)^2 = 0,$$

waarin de coëfficienten p, q en r positief zijn.

De gegeven beschouwingen staan ook in nauw verband met vragen naar uiterste waarden van bepaalde uitdrukkingen. Laat van een driehoek gegeven zijn $4s - b = p$, waarin p een gegeven lijnstuk is. Wat is de extreme waarde van $m_c^2 + c^2$? Men heeft $4(m_c^2 + c^2) = 2a^2 + 2b^2 + 3c^2$ of na eliminatie van b met behulp van $b = p - 2a - 2c$:

$$f(a, c) = 4(m_c^2 + c^2) = 10a^2 + 16ac + 11c^2 - 8ap - 8cp + 2p^2.$$

Uit $\frac{df}{da} = \frac{df}{dc} = 0$ volgt $a = \frac{6}{23}p$, $c = \frac{4}{23}p$ (en $b = \frac{3}{23}p$) en men verifieert gemakkelijk dat f voor deze waarden een minimum (en wel $\frac{6}{23}p^2$) aanneemt. De driehoek ABC is dus volkomen bepaald door de beide voorwaarden $4s - b = p$, $m_c^2 + c^2 = \frac{3}{46}p^2$.

Door eliminatie van p ontstaat de gekunstelde voorwaarde, die ons uitgangspunt was.

BOEKBESPREKING

Prof. Dr. W. Lietzmann, *Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie.* München, R. Oldenbourg 1952.

In dit boek van ruim 200 bladzijden wordt voor een bredere kring van belangstellenden een overzicht gegeven van de meetkunde in ruimten van meer dan drie en in het bijzonder van vier dimensies. De schrijver begint met een behandeling van de axiomatische grondslagen, doch streeft daarbij niet naar volledigheid, om zoals hij opmerkt (blz. 7), snel over meer concrete dingen te kunnen spreken. Reeds vrij spoedig maakt de lezer dan ook kennis met de polytopen, waarvan vooral de regelmatige voortdurend binnen de gezichtskring blijven.

Een grote verscheidenheid van problemen komt aan de orde. Uiteenzettingen worden gegeven over het gebruik van inhomogene en van homogene coördinaten, talrijke afbeeldingsmethoden worden besproken en tenslotte wordt (om niet meer te noemen) na een korte inleiding in de niet-euclidische meetkunde aandacht geschonken aan het onderwerp: „Ruimte, tijd, wereld en de Natuurkunde". Soms heeft men de indruk, dat te veel details worden verhaald (o.a. bij het opsommen van typen van afbeeldingen) en een enkele maal vraagt men zich af of niet allerlei onnodig er bij wordt gesleept, dit te meer, omdat een volledige en exacte behandeling toch niet mogelijk was (o.a. blz. 29/30; 90; 169/170).

Een methode waarvan de schrijver zich dikwijls en dan met talent bedient, is deze, dat beschouwingen worden gehouden voor twee en drie dimensies (bijvoorbeeld over veelhoeken en polyeders) op een zodanige wijze, dat de lezer als van zelf gaat vermoeden, hoe de overeenkomstige stellingen in R_4 en R_n zullen luiden. Indien de beschikbare hulpmiddelen dit toestaan, wordt van de recursieformules en eigenschappen, waartoe men langs deze weg is geleid, ook een bewijs gegeven. Wij zijn een weinig bevreesd, dat uit het feit, dat verschillende malen uitdrukkelijk wordt opgemerkt, dat een bewijs achterwege moet blijven, ten onrechte de conclusie wordt getrokken, dat alles waarbij zulks niet vermeld staat voor de volle 100 % en volkomen correct aangetoond is. Men lette in dit verband

op de inhoudsberekeningen, op blz. 63 en 64 waar het vaststellen van de tweedimensionaliteit der puntverzameling voldoende schijnt om haar als vlak aan te zien en op blz. 188 waar uit de kromming van het sferisch beeld zonder meer geconcludeerd wordt tot de kromming van het elliptische vlak.

Over de vele opmerkingen van philosophische en psychologische aard, die het geheel een levendig karakter geven, alsook over de tendens (verg. blz. 185; 199/200), dat de behandelde meetkunden een zeker practisch nut moeten bezitten, kunnen wij thans niet in bijzonderheden treden. Ook is er geen gelegenheid meer diverse kleinere aantekeningen, die wij maakten (bijvoorbeeld bij de invoering van de oneigenlijke elementen) te vermelden. Wij volstaan met het aanwijzen van de volgende drukfouten. Op blz. 85 is de definitie van het principe van Cavalieri verminkt. De figuur 96 op blz. 126 wijst een onjuiste lengte voor AM aan. Op blz. 139 staat nogal storend $k_{II}(n) > 90°$ i.p.v. $k_{II}(n) > 120°$.

Samenvattend is ons oordeel: Degenen, die uit interesse voor de meerdimensionale meetkunde en speciaal voor de polytopen in R_4 het boek van Lietzmann ter hand nemen, treffen daarin zeer veel wetenswaardigs aan. Zij dienen echter voor ogen te houden, dat het betoog meermalen het karakter bezit (en dikwijls ook wil bezitten) van een plausibel maken van het geponeerde.

G. H. A. GROSHEIDE F. WZN.

H. de Jonge en Dr G. Wielenga, *Statistische methoden in de psychologie*, I. — J. B. Wolters. 1953. Groningen — Djakarta. 232 + 27 blz. Geb. *f* 10.90.

Dit boek is in de eerste plaats bestemd voor studenten in de psychologie. Het wil gebruikt worden bij het onderwijs in de toepassing van statistische methoden in dit vak en enig inzicht geven in de gronden waarop die toepassing berust. Het wil tevens een practische handleiding zijn voor een ieder, die statistische procedures moet toepassen en hen in staat stellen de resultaten van hun berekeningen te interpreteren.

Het thans verschenen eerste deel geeft een elementaire behandeling van het werken met reeksen waarnemingsgetallen en van de betekenis van berekende statistische grootheden. Het bespreekt daartoe de grondbegrippen die bij veel statistische beschouwingen een rol spelen, zoals frequentieverdeling, gemiddelde, mediaan, standaarddeviatie, quartielafwijking, percentiel, normaalkromme,

correlatie. Door een beschouwing van de betrouwbaarheid van het gemiddelde van een steekproef uit een normaal universum wordt de lezer inzicht gegeven in de manier, waarop men in het algemeen de betrouwbaarheid van statistische grootheden beoordeelt.

Bij het onderwijs in de statistiek aan a.s. psychologen kan men van mening verschillen over de vraag naar de mate, waarin de studenten kennis zullen moeten nemen van de wiskundige gronden der door hen bestudeerde methoden. Waar de universitaire studie van de psychologie zowel voor A- als voor B-abiturienten van gymnasium en h.b.s. open staat, ligt het voor de hand, bij de beantwoording van de bovengenoemde vraag rekening te houden met het verschil in vooropleiding van de studenten. Naar wij vermoeden, hebben de schrijvers hiermede rekening trachten te houden door het gebruik van twee lettertypen. De gedeelten die met een kleine letter gedrukt zijn, vergroten nl. in het algemeen niet alleen de omvang van hetgeen met gewone letter is weergegeven — dit zou volgen uit hetgeen de schrijvers in hun voorwoord dienaangaande opmerken — maar gaan ook dieper in op de wiskundige afleiding van de besproken formules of trachten deze wat meer aannemelijk te maken.

Waar ons niet in bijzonderheden bekend is, welke onderwerpen in het tweede deel aan de orde zullen komen, kunnen we nog geen oordeel uitspreken over het al of niet toereikend zijn van de omvang van hetgeen behandeld is. Wat de diepgang van de behandeling betreft, deze is naar onze mening voldoende voor studenten van de A-richting, mits ook zij de kleine letters niet overslaan. Studenten van de B-richting die het met hun studie ernstig menen, zullen zich door de gegeven behandeling moeilijk bevredigd kunnen gevoelen, zodat voor hen een aanvullende behandeling van enkele onderwerpen op zijn plaats zal zijn. Dit betekent echter niet, dat het hier besproken boek voor hen minder geschikt is dan voor studenten van de A-richting. Integendeel, wij zijn van mening dat dit boek voor beide categorieën een zeer bruikbare inleiding geeft in het zo eigenaardige onderdeel van de toegepaste wiskunde, dat door de statistiek wordt gevormd, en bij welke studie het alleszins wenselijk is, zich eerst enigszins oppervlakkig te oriënteren omtrent bedoeling en werkwijze alvorens tot een meer grondige studie over te gaan.

De schrijvers hebben zich niet alleen beijverd om de methoden op een duidelijke wijze uiteen te zetten, toegelicht met voorbeelden, zij hebben ook op talrijke plaatsen met veel nadruk gewezen op de beperkte geldigheid van de redeneringen of op de noodzaak van het in acht nemen van de nodige voorzichtigheid bij het toepassen van de methoden. In enkele gevallen doet de behandeling ietwat

theoretisch aan en zou het de duidelijkheid, die reeds geroemd moet worden, ten goede komen wanneer van een concreet geval werd uitgegaan; zo bijv. bij de bespreking van de correlatieratio op blz. 122 en die van het begrip „kans" op blz. 84. Bij laatstgenoemd begrip wordt de onduidelijkheid van de behandeling nog vergroot, doordat de schrijvers de term „gebeurtenis" in een wisselende betekenis gebruiken, nl. op blz. 84 in die van „(al of niet gunstig) geval" en op blz. 86 in die van „handeling, leidende tot een (al of niet gunstig) geval", terwijl hier tevens gemakkelijk misverstand kan ontstaan doordat zowel bij gunstige gevallen als bij empirisch waargenomen gebeurtenissen van „relatieve frequentie" wordt gesproken. Dit gedeelte wekt dan ook de indruk, dat de schrijvers in een te kort bestek een poging hebben willen doen om een samenvattende behandeling te geven van twee principieel verschillende definities van het begrip „kans".

Soms zijn de schrijvers wat optimistisch t.a.v. het bevattingsvermogen hunner leerlingen. Als evident wordt beschouwd, dat de som van de deviaties van een reeks waarnemingsgetallen nul is en dat, bij vermeerdering van alle waarnemingsgetallen van een reeks met eenzelfde bedrag, het gemiddelde eveneens met dit bedrag toeneemt maar de standaarddeviatie niet verandert. Inderdaad is dit aanschouwelijk te verduidelijken en zijn daardoor enkele redeneringen, waarin de zo schrikwekkende sigma-tekens in groten getale gebezigd worden, te omzeilen; hiertoe kan echter niet volstaan worden met de beschouwing van de figuur van blz. 49.

Deze kleine bedenkingen tegen de behandeling van enkele onderdelen mogen echter niet de indruk wekken, dat wij tegen de wijze van behandeling in haar geheel ernstige bezwaren zouden hebben. Integendeel, de hier genoemde vlekjes worden ten volle ongedaan gemaakt door de zeer heldere en zakelijke beschouwingen op andere plaatsen. Wij noemen bijv. de behandeling van de coëfficient van lineaire correlatie, waarbij wordt uitgegaan van de regressielijnen, de invloed van de heterogeniteit van het onderzochte materiaal op de grootte van de correlatie-coëfficient, het verband tussen de omvang van de steekproeven en de gedaante van de steekproefverdeling van het gemiddelde; terwijl de schrijvers bij de bespreking van het schatten van het gemiddelde van een universum uit dat van een steekproef een in de gangbare elementaire boeken over de statistische methoden veelvuldig voorkomende fout weten te vermijden.

Het boek bevat een honderdtal vraagstukken, dat in een volgende druk wellicht zou kunnen worden uitgebreid en tevens vergezeld gaan van de antwoorden.

Samenvattende, juichen wij de verschijning van dit eerste deel toe en spreken wij de verwachting uit, dat dit Nederlandse boek, wanneer het compleet zal zijn, met succes de plaats van de thans in gebruik zijnde Engelse en Amerikaanse werken zal gaan innemen.

L. N. H. BUNT

Voorbereiding tot de Meetkunde voor de laagste klasse van het Middelbaar Onderwijs, door K. Cuypers en M. Lamberechts. (uitgave van „De Garve". Berchem-Antwerpen.)

Dit boekje is bestemd als inleiding voor het meetkundeonderwijs voor de eerste klasse van de middelbare school in België, maar ik kan me voorstellen, dat menigeen in Nederland hier met genoegen uit putten kan. Uit de inhoud blijkt voldoende de bedoeling van de schrijvers. Er wordt begonnen met de balk. Daarna oefeningen met de tekendriehoeken. Dan komt achtereenvolgens aan de orde: rechthoek, kubus, vierkant, oppervlakte en inhoud, de driehoek, het rechte driezijdige prisma, het blok, het parallelogram, de ruit, constructies met passer en aan het eind van de inleiding, de bol. Het boekje eindigt met een meer systematische behandeling van de rechte lijn, de hoek, en de cirkel.

Zoals men ziet wordt afwisselend planimetrie en stereometrie behandeld. Uit de stereometrische figuren bv. de balk wordt een planimetrische figuur: de rechthoek gehaald en daarna bekeken. Er worden echter geen eigenschappen bewezen. Wel wordt al vlug met spiegeling, symmetrie, gelijkvormigheid gewerkt. Eenvoudige symmetrische figuren, die als versiering kunnen dienen, worden als „ontspanning" gegeven. Oppervlakte en inhoud worden afgeleid uit vierkant en kubus met gehele getallen voor de lengte; hetzelfde geldt voor de driehoek en het driezijdig prisma. Bij de opgaven moet de inhoud van allerlei gebruiksvoorwerpen berekend worden.

Voor iemand, die ervan overtuigd is, dat de stereometrische figuren het beste middel zijn om de leerlingen met planimetrische eigenschappen vertrouwd te maken, is dit boekje uitstekend te gebruiken.

In het laatste deel (van § 45 tot § 53) wordt een enkel bewijs en axioma gegeven, maar de bedoeling van de schrijvers is niet hiermee te wachten tot alles behandeld is, maar dit er tussendoor te behandelen.

Het zou de moeite waard zijn om eens na te gaan of men na het gebruik van het boekje vlugger kan opschieten en of er winst aan animo en belangstelling is.

H. M.

KORREL CX

TWEE VRAGEN.

1. Ik kreeg een schoolboek over driehoeksmeting in handen, even later een tweede, waarin **secans** en **cosecans** herhaaldelijk voorkomen; in de theorie en in de vraagstukken. Welk weet ik niet, maar er moet ook een meetkunde-boek zijn met een bladzij of wat goniometrie, zoals dat thans gewoonte is, en dat op die trap van kennis, het nodig oordeelt (of is het enkel maar sleur?) ook secans en cosecans op te nemen!

Wie verdedigt het aanhouden van secans en cosecans voor het M. en V. H. O.? Zie in welk boek over voortgezette wiskunde U wilt (niet speciaal een driehoeksmeting-boek) b.v. over analyse, analytische meetkunde, mechanica, natuurkunde, U vindt er secans en cosecans niet in, zelfs niet cotangens, die we ook wel uit onze boeken konden weglaten; maar dat hoeft niet m.i.

2. De formules van „Mollweide". Weet iemand, wie dat was, wat hij heeft gedaan, wanneer hij leefde? Wie heeft die man in ons land ten tonele gevoerd, waarvan waarschijnlijk geen van de lezers meer weet dan de naam? In mijn Beknopte driehoeksmeting staat als noot:

> Deze formules waren in het begin van de 18e eeuw al bekend (zie Euclides, Jg. VIII blz. 271). Mollweide publiceerde ze in 1808; Delambre in 1809; de overeenkomstige formules in de Boldriehoeksmeting worden naar Delambre genoemd. Daarom stel ik voor ze voortaan ook in de Vlakke Driehoeksmeting **„de formules van Delambre"** te noemen. Delambre (1749—1822) is een naam, die wat zegt in dit vak. Mollweide ontbreekt zelfs in een grote Duitse Encyclopedie.
>
> Heb ik ongelijk? P.W.

KORREL CXI

$a \cos \varphi + b \sin \varphi = c.$

We definiëren de goniometrische verhoudingen voor alle kwadranten als volgt: $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ en $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$. Stelt men

$r = 1$, dan is $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$; $\text{tg}\, \alpha$ en $\text{cotg}\, \alpha$ laten we hier weg; $\sec \alpha$ en $\text{cosec}\, \alpha$ worden geheel verzwegen, als volslagen overbodig bij het middelbaar onderwijs.

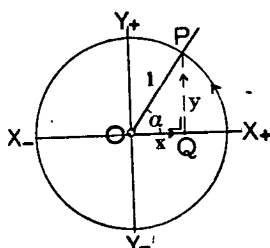


Fig. 1.

Voor een hoek in het 1e kwadrant hebben we dus: de abscis van het snijpunt P van het tweede been van α (OX is het eerste) heet de cosinus van α, de ordinaat heet de sinus van α.

Deze bepaling wordt onveranderd overgedragen op hoeken β, γ en δ, waarvan het tweede been opv. in het 2e, het 3e en het 4e kwadrant ligt; zie de figuren 2, 3 en 4. In de algebrales hebben ze geleerd, welke tekens de coördinaten van punten in alle kwadranten hebben. Wat is natuurlijker, dan dat we deze kennis toepassen bij de nieuwe begrippen?

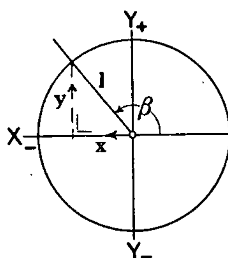


Fig. 2.

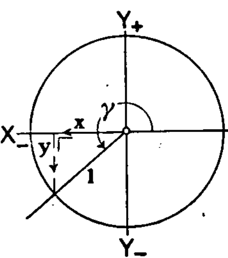


Fig. 3.

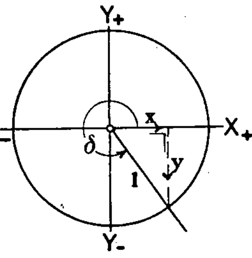


Fig. 4.

Het is volstrekt onnodig achtereenvolgens hoeken in de verschillende kwadranten te beschouwen en een bladzij of 3 te besteden om te komen tot:

De sinus van een hoek in het 1e of 2e kwadrant is positief,
de sinus van een hoek in het 3e of 4e kwadrant is negatief;
en soortgelijke voor de cosinus en de tangens.

Spreken we het woord „coördinaten" uit, dan bedoelt ieder abscis en ordinaat, nooit zal men horen: ordinaat en abscis. In de analytische meetkunde en in het aftreksel: de grafieken van het M.O., is x de eerste, y de tweede coördinaat. Bij de goniometrie dus eerst de cosinus, dan de sinus; de cosinus is de hoofdverhouding, de sinus komt als tweede er achter aan. Stellingen in de vlakke meetkunde en in de stereometrie zijn er vele, waarin een projectie, een cosinus, een rol speelt; geen enkele bij mijn weten spreekt er over de projector, over de sinus.

Wat dit er nu toe doet, of je de ene of de andere als eerste beschouwt? Wel, het komt alles zo mooi uit met wat reeds bestaat:

1) $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x + iy$;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $x = a\cos\varphi$ en $y = b\sin\varphi$;

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $x = a\cos h\varphi$ en $y = b\sin h\varphi$.

$a\cos\varphi + b\sin\varphi = c$.

In alle boeken op één na, ziet men $a\sin\varphi + b\cos\varphi = c$; we noemen de onbekende φ. In beide gevallen stelt men $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$ en vindt dan:

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = c$$
$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$
$$\varphi - \alpha = \pm\beta + k\,.\,360^\circ$$

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = c$$
$$\sin(\varphi + \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$
$$\varphi + \alpha = \begin{cases} \gamma + k\,.\,360^\circ \\ 180^\circ - \gamma + k\,.\,360^\circ \end{cases}$$

De gang is dezelfde; de eerste is op het laatst iets eenvoudiger dan de tweede; dit zou echter geen voldoende reden zijn om de cosinus voorop te zetten.

We geven nu de meetkundige oplossing van $a\cos\varphi + b\sin\varphi = c$. In de eenheidscirkel is $\cos\varphi = x$ en $\sin\varphi = y$, zodat we hebben

$$\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

We hebben dus slechts de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ te snijden met de rechte $ax + by = c$; de voerstralen naar de snijpunten maken met de as OX_+ de gevraagde hoeken. Zie fig. 5 met de oplossing van $\cos\varphi + 6\sin\varphi = 3$; zie de snijpunten S_1 en S_2 van $x + 6y = 3$ met de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.

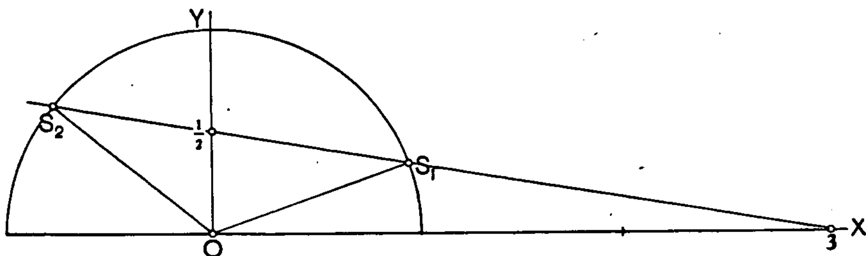


Fig. 5.

Deze grafische oplossing is verreweg de eenvoudigste meetkundige oplossing; men heeft de hoeken φ_1 en φ_2 slechts te meten met de

gradenboog om ze in graden nauwkeurig af te lezen: op fig. 5 vinden we $\varphi_1 \approx 20°$ en $\varphi_2 \approx 141°$. Met een kleine berekening er bij vindt men de hoeken op een minuut nauwkeurig; zie maar (Noordhoffs tefel in 4 dec.):

cos 20°	= 0,9397	De cosinus loopt af met $1e_4$, de sinus op
6 sin 20°	= 2,0520	met $3e_4$; k min. geeft $(-k + 6 \,.\, 3k)e_4 =$
	2,9917	$83e_4$, waaruit $k = 5$; dus is $\varphi_1 = 20°5'$.

$$\cos 141° + 6 \sin 141° = -\cos 39° + 6 \sin 39°.$$

— cos 39° =	— 0,7771	; laat nu 39° stijgen met k min.; dat geeft
6 sin 39° =	3,7758	$-k + 6.2k = 13e_4$; $k = 1$; de hoek is dus
	2,9987	$180° - 39°1' = 140°59'$.

Deze oplossing is nog wel zo gemakkelijk als de gewone, de algebraische.

De uiterste waarden kan men ook gemakkelijk vinden; het gaat enkel om de raking van $ax + by = c$ aan de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. De bijzondere gevallen zijn al zeer eenvoudig: 1) $c = 0$; 2) $a = b$; 3) $a = -b$; 4) $a = c$; 5) $a = -c$; 6) $b = c$; 7) $b = -c$; in het bijzonder ook $\cos \varphi \pm \sin \varphi = \pm 1$ en algemeen $a \cos \varphi \pm b \sin \varphi = \pm c$, in beide alle vier op één figuur. — We laten het hierbij.

P. W.

KORREL CXII

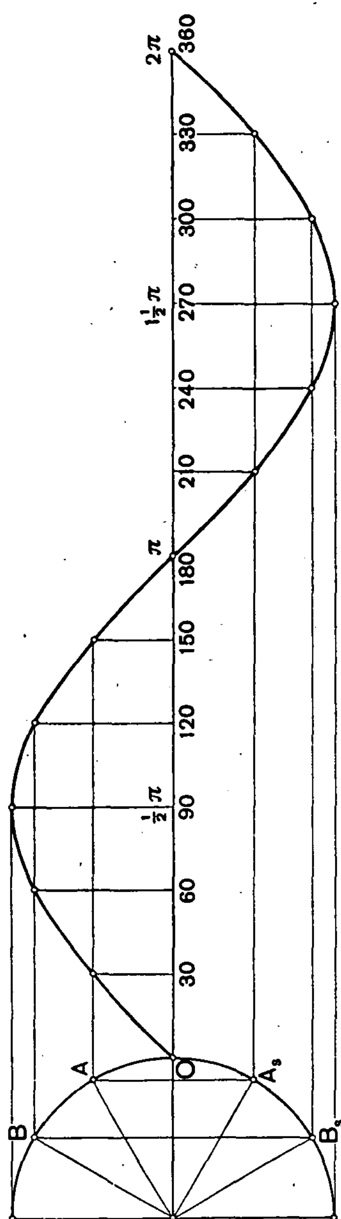
GRAFIEKEN VAN DE GONIOMETRISCHE FUNCTIES.

In de algebra tekenen we de grafieken van $7x - 3y = 23$, van $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 12$, van $y = \dfrac{4x + 10}{x + 6}$, van $xy = 16$, van $x^2 + y^2 = 20x + 56$, om er maar eens enige te noemen. Daarbij gaan we zo mogelijk na of de figuren punten hebben met gehele coördinaten, korter gezegd: of ze rooster punten hebben; die stipt men eerst aan. Ook kan men nog wel aan geven b.v. A $(3; -5\frac{1}{2})$, als men tenminste 2 mm of $2\frac{1}{2}$ mm-papier neemt; mm-papier is te fijn; voor de ogen van de leerlingen schadelijk; voor de school ongemakkelijk, geen enkel voordeel.

De roosterpunten zijn voor het tekenen van een grafiek van het grootste belang. Even een opmerking: $7x - 3y = 23$; hoe vindt men ze? Eenvoudig zo: neem $y = 1, 2, 3, \ldots$ en tel zij op bij 23; dat gaat uit het hoofd: 26, 29, 32, 35 = 7 voud; $x = 5$ en $y = 4$, dus algemeen $x = 5 + 3t$, $y = 4 + 7t$. Het vinden van de rooster punten is het opstellen van de parametervergelijking van de lijn. Roosterpunten van de andere functies; een studie apart, niets voor de school. Men krijgt bij de andere functies dikwijls punten als $(2; -\frac{1}{3})$ of $(5; 3\frac{1}{4})$; op zichtbare ruitjes, kan men die wel aanstippen.

Maar welke roosterpunten heeft $y = \sin x$? Tot $\frac{1}{2}\pi$ alleen (0;0) en $(\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{2})$. Van ruitjes heeft men enkel maar last; ze doen helemaal geen dienst, zeker niet op mm papier, waarop de ruitjes nauwelijks zichtbaar zijn; op behoorlijk ruitjespapier evenmin ook maar het geringste voordeel.

Hoe dan wel? Men tekene een cirkel (een halve is al genoeg) met $r = 1$; als eenheid neme men een 7 — voud mm, afhankelijk van de breedte van het papier; $1 + 2\pi \approx 7{,}28$; we moeten een eindje van de kant afblijven. Een blaadje van een schrift is ruim 160 mm breed; neem dus als eenheid rond $160 : 8 = 20$; 21 is deelbaar door 7. Dus een cirkel met 21 mm als eenheid; voor de figuur hiernevens is $r = 21$ mm genomen, dus $2\pi = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 21 = 132$ mm; stip aan 33, 66, 99, 132 mm, daarna elk stuk in drie gelijke delen: 11, 22, enz.; zet er bij 30°, 60°, enz. en loodlijnen op de x-as; de



ordinaten bij 30°, 60°, 90°, 120° en 150° er boven, die rechts van 180° er onder. Daarna op de cirkel 30°, 60°, 90°, —30°, —60°, —90°; zie A en A_3, B en B_3 (3 = spiegelpunt). Uit A, B, A_3 en B_3 lijnen evenwijdig met de x — as. Men heeft nu 13 punten, waar men de kromme doorheen laat gaan. Voor de school is dit voldoende. Een bladzijde van een schrijfbloc meet overdwars 270 mm; neem als eenheid $r = 42$ mm; $r + 2\pi r$ komt dan uit op 264 mm. Deze maat is het meest aan te bevelen, want dan kan men op de halve cirkel (dun, rechts van de y — as) ook nog 15°, 45°, 75°, —15°, —45° en —75° nemen, zodat men er nog 12 punten bij vindt.

In de meetkunde leren we $\pi = 3{,}1416$; voor het gewone gebruik 3, 14, ook 22/7; voor de school os 22/7 (de betrekkelijke fout is slechts 1/2600) aan te bevelen, omdat men met een 7-voud mm de lengte van 2π kan afzetten. *In geen geval neme men $\pi = 3$ of erger.* Men krijgt wel een kronkellijn, maar slechts een ruwe benadering; waarom, als het ook goed kan? Een groot bezwaar heeft deze afwijking nog; als we wat doen aan differentiaal-rekening, dan komt de afgeleide cos x van sin x te voorschijn; deze afgeleide geeft de tangens voor de raaklijn; in (0, 0) is cos 0° = 1; dan moet de grafiek van sin x (ook van tg x) oplopen onder een hoek van 45°. Op een figuur, waarop π verkleind is tot 3 is die hoek natuurlijk groter ongeveer 46° 20′; dit vond ik in een schoolboek; op een andere figuur is π verkleind tot 2 met een hoek groot 57° 30′.

In een ander boek is de eenheid 14 mm; $2\pi r = 53$ mm: het moet 88 mm zijn; de bedoelde hoek is op die grafiek 59°'.

In een derde boek is $r = 7$ mm, $\pi r = 21$ mm; ook weer $\pi = 3$.

In een vierde $r = 10$ mm, $\pi r = 60$ mm!. Dus net het dubbele van wat de $\pi = 3$ — schrijvers er van maken; de hoek in O is 27°39' in plaats van 45°.

In de vijfde $r = 12$ mm en $\pi r = 51$ mm, inplaats van 37,7, met het gevolg, dat de hoek, hier bedoeld, 36°15' is; dit op een linkerbladzijde: op de naastliggende rechterbladzijde loopt de lijn, die $y = \operatorname{tg} x$ moet voorstellen, in O op onder een hoek van 30°!

In een zesde boek vinden we $r = 20$ mm en $\pi r = 30$ mm in plaats van 62,8 mm! $y = \sin x$ loopt op onder een hoek van 64°28'! In twee andere figuren vindt men hoeken opv. van 54° en 50°. In hetzelfde boek wordt de afgeleide van $\sin x$ bepaald; die wordt 1 voor $x = 0$ en $1 = \operatorname{tg} 45°$; op de enige plaats, waar dat te pas komt, nl. bij de grafiek van $\sin x$, heeft die hoek de drie genoemde grootten!

Allen zeggen, dat ze $y = \sin x$ tekenen, maar de figuren geven $y = a \sin x$, waarbij voor a maar wat genomen wordt.

We leren ze ook $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ en $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. En dan vind ik het zo nuttig, dit ook eens te bevestigen met een tafel. In een tafel, ook voor de school, behoort een herleidingstafel voor te komen, die graden en onderdelen omzet in radialen; daarmee is het mogelijk leerlingen te laten zien, dat het uitkomt: de proef op de som om het zo eens uit te drukken.

We nemen Noordhoff's Tafel in 4 decimalen blz. 80

		sin	rad	tg
4° = 0,0698 rad	we vinden op	0,0698	0,0698	0,0699
3° = 0,0524 rad	blz. 59 en 58	0,0523	0,0524	0,0524
2° = 0,0349 rad		0,0349	0,0349	0,0349
1° = 0,0175 rad		0,0175	0,0175	0,0175

De limieten hierboven genoemd, worden meetkundig bewezen, te beginnen met $2 \sin x < 2x < 2 \operatorname{tg} x$, dus $\sin x < x < \operatorname{tg} x$; laat de leerlingen ook eens getallen zien, b.v. deze uit een tafel in 5 decimalen (met een tafel in 4 dec. moet men wat grotere hoeken nemen om verschil te krijgen in de 4e decimaal)

sin	rad	tg
0,06976	0,06981	0,06993
0,05234	0,05236	0,05241
0,03490	0,03491	0,03492
0,01745	0,01745	0,01746

Dat beide limieten 1 zijn, zien de leerlingen onmiddellijk. Wat betekent dit voor de grafieken? Wel, dat die van $y = \sin x$, $y = x$ en $\equiv$ tg x in dat interval zo goed als samenvallen; bij 10°, nog een heel eind verder dan, zijn de drie getallen:

sin	rad	tg
0,17365	0,17453	0,17633

Bij een eenheid van 1 dm, dus een grafiek van 6,28 dm, zijn de ordinaten bij 10° 17,4 mm, 17,5 mm en 17,6 mm; nog geen tiende mm verschil tussen de eerste twee en nauwelijks twee tiende tussen de laatste twee.

Dus: tot 10° zeker lopen de grafieken van $y = \sin x$, $y = x$ en $y = \operatorname{tg} x$ samen; *$y = x$ maakt eén hoek van 45° met de x-as*. De aanleiding tot het bovenstaande was het tweede vraagstuk van het eindexamen van de H.B.S. in 1952; dat luidt onder 2*a* zo:

„ Teken in één rechthoekig coördinatenstelsel de grafieken van $y = \cos x$ en $y = \sin x + \cos x$ voor alle waarden van x, die voldoen aan $0 \leqq x \leqq 2\pi$; met sin x en cos x worden bedoeld de sinus en decesinus van een hoek van x radialen. Het punt op de x-as, dat op een afstand van 6 cm van de oorsprong ligt, geeft een hoek van π radialen aan."

De toevoeging over die cm maakt de zaak nodeloos moeilijk; we moeten eerst de eenheid uitrekenen; die 6 cm moeten π radialen voorstellen; in mm dus $60 : \pi = 19{,}1$ mm, *tenminste, als men wil voldoen aan de eis van het vraagstuk, dat men $y = \cos x$ tekent en niet zo maar een slingerende lijn.* Waarom niet de eenheid gegeven? Radialen hebben toch niets te maken met cm!

Wil men aanwijzingen geven voor het tekenen van de grafiek, wel, zeg dan: neem als eenheid b.v. 28 mm en $\pi = 3\frac{1}{4}$ tg, laat dan alles in radialen verlopen; onder de x-as maar liever 30°, 60°, 90° . . .; dit is voor een vlugge uitvoering wel zo goed.

P. WIJDENES

KORREL CXIII

Hoeveel cirkels met een gegeven straal x raken aan 2 gegeven cirkels (M ; R) en (N ; r)?

We stellen $R > r$ en $MN = y$. Het aantal oplossingen is dan gelijk aan het aantal snijpunten van de cirkels C_1 $(M ; R + x)$ en $C_2(M ; | R — x |)$ met de cirkels $C_3(N ; r + x)$ en $C_4(N ; | r — x |)$. Hierbij moeten we echter de volgende combinaties uitsluiten: $x = r$ met $y = R \pm r$ en $x = R$ met $y = R \pm r$; immers in het geval $x = r$ en $y = R + r$ is C_4 de nulcirkel met middelpunt N ; N ligt bovendien op C_1. Daar echter de cirkel $(N ; x)$ nu samenvalt met de cirkel $(N ; r)$, kunnen we moeilijk over „raking" spreken. De cirkels C_1 en C_3 hebben 2 snijpunten, als: $R — r < y < R + r + 2x$. Tekenen we nu in een grafiek de lijnen: $y = R — r$ en $y = R + r + 2x$ (resp. a en a'), dan zullen voor waarden (x, y), waarvan de beeldpunten rechts van de Y-as tussen a en a' gelegen zijn, de cirkels C_1 en C_3 twee snijpunten hebben. Op a en a' liggen de punten, waarvan de coördinaten zodanig zijn, dat C_1 en C_3 elkaar raken.

We tekenen verder de grafieken van:

$y = R + x — | r — x |$ (lijn b) en $y = R + x + | r — x |$ (lijn b')

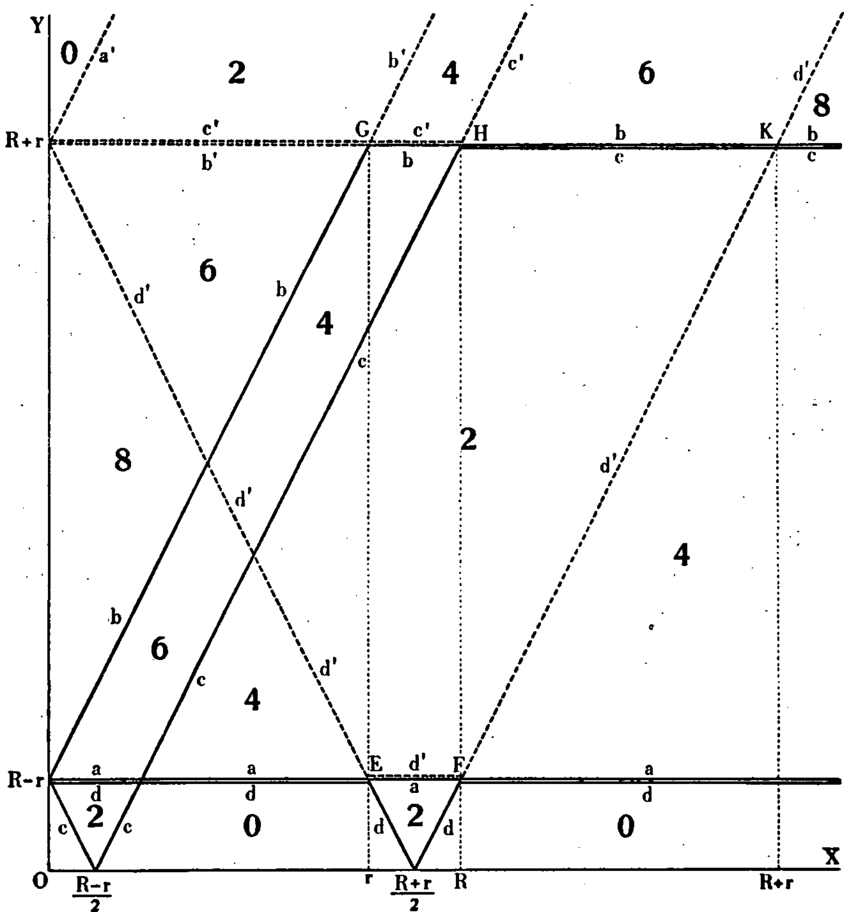
De cirkels C_1 en C_4 hebben 2 snijpunten voor waarden (x, y), waarvan de beeldpunten rechts van de Y-as tussen b en b' gelegen zijn. Voor de combinaties C_2, C_3 en C_2, C_4 tekenen we de grafieken van:

$y = \big|\, | R—x | — (r+x) \big|$ (lijn c) $\qquad y = | R—x | + r+x$ (lijn c')

$y = \big|\, | R—x | — |r—x| \big|$ (lijn d) $\qquad y = | R—x | + | r—x |$ (lijn d')

a, b, c en d zijn in de figuur aangegeven door getrokken lijnen; a', b', c' en d' door stippellijnen. Het aantal oplossingen voor ieder gebied is nu eenvoudig te bepalen. We kiezen een bepaalde waarde voor x en laten y toenemen, te beginnen bij $y = 0$. Bij het passeren van een getrokken lijn neemt het aantal oplossingen met 2 toe; bij het passeren van een stippellijn neemt het met 2 af. Passeren we een dubbele getrokken lijn, dan neemt het aantal opl. met 4 toe, enz. Nemen we als voorbeeld $x < \frac{1}{2}(R — r)$, dan is het aantal opl. achtereenvolgens: 0 ; 1 (op lijn c); 2 ; 4 (op de dubbelrechte a, d), 6 ; 7 (op lijn b); 8 ; 7 (op lijn d') 6 ; 4 (op de dubbelrechte b', c'); 2 ; 1 (op lijn a'); 0.

3 en 5 komen dus niet voor. Voor $x > R + r$ komen *alle* negen mogelijkheden voor: het aantal opl. bedraagt achtereenvolgens: 0; 2; 4; 6; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0.



Voor $x = \frac{1}{2}(R \pm r)$; $y = 0$ is het aantal opl. oneindig; het zijn de cirkels, die twee gegeven concentrische cirkels raken.

De punten E, F, G en H zijn de beeldpunten van de uitgesloten combinaties. Het aantal opl. in de overige snijpunten gaat analoog; b.v. lijn c: achtereenvolgens oneindig ($y = 0$); 1 ; 3 (op snijpunt met a, d); 5 ; 4 (op snijpunt met d'); 3; verder tussen H en K : 4; in K : 5; rechts van K : 6. Het aantal in K zelf bepaalden we door langs d' te gaan; immers tussen F en K is het aantal 3; in K komen er 2 bij.

P. Bronkhorst

DIDACTIEK IN DE 15e EEUW

De vereenvoudiging van de algebraïsche taal, zoals die tegenwoordig gebruikt wordt, is voor een belangrijk deel te danken aan Descartes, die in zijn Geometrie van 1637 voor het eerst het teken x invoerde ter aanduiding van de onbekende term in een vergelijking. Vóór de 17e eeuw was er geen eenheid in de symbolische schrijfwijze; bovendien gebruikte men woorden uit het gewone spraakgebruik met een technische betekenis voor de algebraïsche formules. De moeilijkheden die dit gaf voor het onderwijs blijken duidelijk uit de oplossingen, die Luca Paciuolo [1]) geb. 1445 gaf voor de gewone typen van de vierkantsvergelijking:

$$x^2 + px = q;\ px + q = x^2;\ x^2 + q = px.$$

Hij koos hiervoor — blijkbaar als rhythmesteun voor het geheugen; verg. de bekende versjes en rijmpjes, nòg in het onderwijs gebruikelijk — driemaal een hexametrisch tetrastichon:

Primi canonis versus

Si res et census numero coequantur, a rebus
Dimidio sumpto censum producere debes
Addereque numero, cuius a radice totiens
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

Secundi canonis versus

Et si cum rebus dragme quadrato pares sint
Adde sicut primo numerum producto quadrato
Ex rebus mediis, eiusque radice recepta
Si rebus mediis addes, census patefiet.

Tertii canonis versus

At si cum numero census radices equabit
Dragmas a quadrato deme rerum medietarum
Cuiusque supererit radicem adde traheve
A rebus mediis, sic census costa notescet.

---

[1]) Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita fol. 145 bij Cantor Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II pag. 321. 1913.

Proza-vertaling:

Eerste oplossing

Indien een bepaald aantal onbekenden, vermeerderd met het kwadraat van de onbekende, gelijkgesteld worden aan een bepaald getal: moet men van het halve aantal onbekenden een kwadraat maken en dit optellen bij het bepaalde getal; van deze som de wortel nemen en hetzelfde halve aantal onbekenden in beide leden van de vergelijking aftrekken; dan zal het kwadraat van de onbekende en de onbekende zelf voor de dag komen.

Tweede oplossing

En indien een bepaald getal, vermeerderd met een bepaald aantal onbekenden gelijk is aan het kwadraat van de onbekende: tel dan, zoals in het eerste geval, het bepaalde getal op bij het kwadraat van de helft van het aantal onbekenden; neem daarvan de wortel, voeg die bij het halve aantal onbekenden en het kwadraat van de onbekende wordt duidelijk.

Derde oplossing

Maar indien het kwadraat van de onbekende, vermeerderd met een bepaald getal, gelijk is aan een bepaald aantal onbekenden: trek dan het bepaalde getal af van het kwadraat van het halve aantal onbekenden; neem van wat er overblijft de wortel; tel die op bij of trek die af van het halve aantal onbekenden; zo vindt men de wortel van het kwadraat van de onbekende.

Om de tekst van het Latijn te kunnen begrijpen, moeten de volgende vaktermen bekend zijn:

res : ding, onbekende.
latus : zijde, wortel van het kwadraat van de onbekende.
radix : wortel, onbekende.
costa : ribbe, zijde, wortel van een kwadraat, onbekende.
census : grondbezit, oppervlak, kwadraat, kwadraat van de onbekende.
numerus : getal, bekende term.
dragme = dragmae : handvol, getal, bekende term.
medius of medietus : half.

's-Gravenhage. C. J. VOOYS.